前回：§2：陰関数
（第2回）
§3：ベクトル場

今回：§4：ベクトル空間の
（第3回）
交代形式と外積

§4 : ベクトル空間の交代形式と外積

Recall : ベクトル場 :

$$X : M \to TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

with $X_p \in T_pM \ (\forall p \in M)$

Def (§5でやる)

写像 $\omega : M \to \bigwedge^k (TM)^\vee = \bigsqcup_{p \in M} \bigwedge^k (T_pM)^\vee$

$\uparrow$ T_pM上の"交代形式"の空間

が k次微分形式 (k-form)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\omega_p \in \bigwedge^k (T_pM)^\vee \ (\forall p \in M)$

内容

- ベクトル空間の双対空間
- 双対基底
- ベクトル空間上の交代形式
- 交代形式の外積
- 交代形式のなすベクトル空間の基底

§4.1 : 双対空間

V : m-dim'l vector space / $\mathbb{R}$

<u>Def 4.1</u> : 写像 $\alpha : V \to \mathbb{R}$ が線型汎関数 (linear functional)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ α は線型写像

$$V^\vee := \{ \alpha : V \to \mathbb{R} \mid \text{linear functional} \}$$

とおく

Prop 4.2: $V^\vee$ はベクトル空間.

和: $\alpha + \beta : V \to \mathbb{R}$

$$v \mapsto \alpha(v) + \beta(v)$$

スカラー倍: $\lambda\alpha : V \to \mathbb{R}$

$$v \mapsto \lambda \cdot \alpha(v)$$

$$(\alpha, \beta \in V^\vee, \ \lambda \in \mathbb{R})$$

ベクトル空間 $V^\vee$ を V の<u>双対空間</u>という.

◎ 双対基底

Q： $V^\vee$ の次元は？

A： $\dim V\ (=m)$ と一致！

$\mathcal{B} = \{e_1 \cdots e_m\}$: V の基底とする.

$w_1, \cdots, w_m : V \to \mathbb{R}$ を

$$w_i(v) = w_i\left(\sum_{j=1}^{m} a_j^v e_j\right) = a_i^v$$

(ただし $v \in V$ について $v = \sum_{j=1}^{m} a_j^v e_j$ とした)

と定める.

<u>Theorem 4.3</u> $\mathcal{B}^\vee := \{w_1 \cdots w_m\}$ は $V^\vee$ の基底

この $\mathcal{B}^\vee$ を $\mathcal{B}$ の双対基底という

Thm 4.3 の証明

示 (1) $w_i \in V^\vee$ i.e. $w_i : V \to \mathbb{R}$ は線型 $(\forall i = 1, \cdots m)$

(2) $\mathcal{B}^\vee := \{w_1, \cdots, w_m\}$ は一次独立 in $V^\vee$

(3) $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \mathcal{B}^\vee = V^\vee$

(1) は easy

(2) を示す. $(c_1, \cdots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ について $\sum_i c_i w_i = 0$ とする.

示 $(c_1 \cdots c_m) = 0$ i.e. $\forall i_0 = 1, \cdots, m$, $c_{i_0} = 0$.

$\forall i_0 = 1, \cdots, m$ をとる. $v = e_{i_0}$ について

$$0 = \left(\sum_i c_i w_i\right)(v) = \sum_i c_i \cdot w_i(v) = \sum_i c_i \, w_i(e_{i_0}) = c_{i_0}$$

(3) を示す.

(示) $\forall \alpha \in V^\vee$, $\exists (c_1 \cdots c_m) \in \mathbb{R}^m$ s.t. $\alpha = \sum_{i=1}^{m} c_i w_i$

$\forall \alpha \in V^\vee$ をとる.

$c_i := \alpha(e_i) \quad (i = 1, \cdots, m)$ とおく.

(示) $\alpha = \sum_i c_i w_i$ i.e. $\forall v \in V$, $\alpha(v) = \sum_i c_i w_i(v)$

$\forall v \in V$ をとる. $v = \sum_i a_i^v e_i$ とおく.

$\alpha(v) = \alpha(\sum a_i^v e_i) = \sum a_i^v \alpha(e_i) = \sum a_i^v \cdot c_i$

$\sum c_i w_i(v) = \sum_i c_i \cdot a_i^v$

∎.

Ex 4.4 M : m-dim'l C^∞-mfd.

$p \in M$: fix

- 接空間 T_pM は m-dim'l vector space $/\mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ 双対空間 $(T_pM)^\vee$ も m-dim'l vector space $/\mathbb{R}$

- $f \in C^\infty(M)$ とすると, $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$

は linear functional

つまり $df_p \in (T_pM)^\vee$

- $(U, x) \in S_M$ with $p \in U$ を固定する.

$$\mathcal{B} := \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \right\}_{i=1,\cdots,m} \text{ は } T_pM \text{ の基底}$$

$\rightsquigarrow$ 双対基底 $\mathcal{B}^\vee$ を

$$\mathcal{B}^\vee = \{ (dx_i)_p \}_{i=1,\cdots,m}$$ のように書く.

(記号の説明)

つまり $(dx_i)_p : T_pM \to \mathbb{R}$ は線型で

$$(dx_i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$ となるもの

§4.2 交代形式

V : m-dim'l vector space $/\mathbb{R}$

$k = 0, 1, 2, \cdots, m$ とする.

Def. 4.5 写像 $\omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$

が V 上の k 次交代形式

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (1) ω は多重線型

&

(2) ω は交代的

Def. 4.5 (再掲) 写像 $\omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$

が V 上の k 次交代形式

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (1) ω は多重線型

i.e. $\forall l = 1, \cdots, k$

& $\omega(v_1, v_2, \cdots, v_{l-1}, a v_l + b v_l', v_{l+1}, \cdots v_k)$

$= a\,\omega(v_1, \cdots, \cdot, \cdots, v_k) + b\,\omega(v_1, \cdots, v_l', \cdots v_k)$

$(\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall v_1 \cdots v_l, v_l', \cdots v_k \in V)$

(2) ω は交代的

i.e. $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$ (k次対称群)

$\omega(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\omega(v_1 \cdots v_k)$

Remark 1: たとえば ω : V 上の 2-次交代形式 について

"$\omega(v, w) = \omega(v, 0) + \omega(0, w)$"

のようにはならない!

Remark 2:

この講義では $k=0$ のとき $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{0} := \mathbb{R}$ と定める.

特に "0次交代形式 on V" とは

$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への線型写像 のことと定める.

Remark 3 : 1次交代形式 on V とは

V 上の linear functional のこと.

Ex 4.6 : V : 2次元 とし, $\mathbb{B} = \{e_1, e_2\}$: V の基底とする.

$$\omega_{\mathbb{B}} : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{matrix} ae_1 \\ + \\ ce_2 \end{matrix}, \begin{matrix} be_1 \\ + \\ de_2 \end{matrix} \right) \mapsto \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とすると

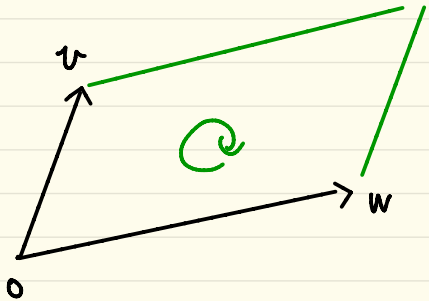
$\omega_{\mathbb{B}}$ は V 上の 2次交代形式.

交代形式の気持ち

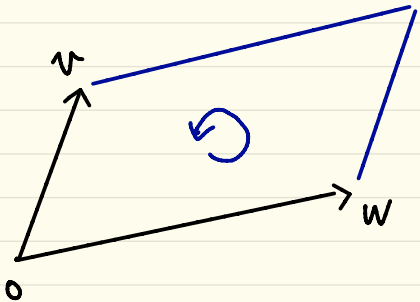
"原点から生えている向きのついた
k-次元平行四辺形"

に対して，それぞれ実数を対応させたい．

ω : 2次交代形式

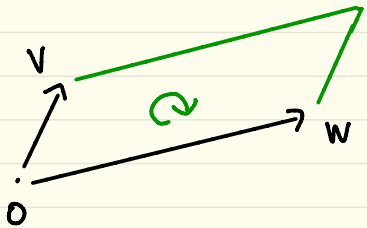


$\longmapsto \quad \omega(v, w)$

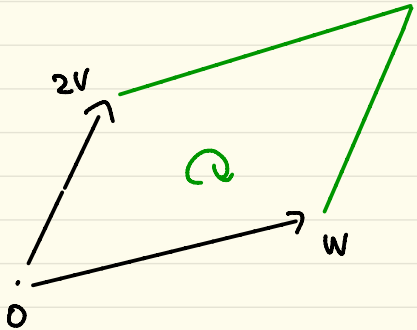


$$\longmapsto \quad \omega(w, v) = -\omega(v, w)$$

ω : 2次交代形式



$\longmapsto \quad \omega(v, w)$



$\longmapsto \quad \omega(2v, w)$

$\left(= 2\omega(v, w) \right)$

以降

$$\bigwedge^k V^\vee := \{ V \text{ 上の } k \text{ 次交代形式} \}$$

とおく.

<u>Remark</u>

$$\bigwedge^0 V^\vee = \{ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{線型} \} \cong \mathbb{R}$$

$$\bigwedge^1 V^\vee = V^\vee$$

Prop 4.7 : $\bigwedge^k V^\vee$ は ベクトル空間 $/\mathbb{R}$

和 : $\omega_1 + \omega_2 : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$

$$(v_1 \cdots v_k) \mapsto \omega_1(v_1 \cdots v_k) + \omega_2(v_1 \cdots v_k)$$

スカラー倍 : $\lambda\omega : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$

$$(v_1 \cdots v_k) \mapsto \lambda \cdot \omega(v_1 \cdots v_k)$$

$$\left(\omega_1, \omega_2, \omega \in \bigwedge^k V^\vee, \ \lambda \in \mathbb{R} \right)$$

Q : $\bigwedge^k V^\vee$ の次元は？

A : $\binom{m}{k} \quad \left(:= \dfrac{m!}{k!(m-k)!} \right)$

（ただし $m = \dim V$ ）

後で基底を与える.

§4.3 : 交代形式の外積

V : m-dim'l vector space $/\mathbb{R}$

以下, $k, l = 0, 1, 2, \cdots, m$ を $k+l \leq m$ となるものとする.

外積 : $(\overset{k}{\wedge} V^\vee) \times (\overset{l}{\wedge} V^\vee) \to \overset{k+l}{\wedge} V^\vee$

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2$$

を定義しよう

ω_1 : k 次微分形式

ω_2 : l 次微分形式　とする.

Def 4.8 $\omega_1 \wedge \omega_2 : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k+l} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

各 $(v_1 \cdots v_{k+l}) \in V \times \cdots \times V$ について

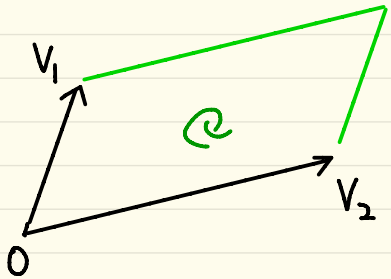
$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1 \cdots v_{k+l})$$

$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \omega_1(v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(k)})\, \omega_2(v_{\sigma(k+1)} \cdots v_{\sigma(k+l)})$$

と定める.

$k = l = 1$ のとき

$$\omega_1 \wedge \omega_2 (v_1, v_2) = \omega_1(v_1)\,\omega_2(v_2) - \omega_1(v_2)\,\omega_2(v_1)$$



Recall : $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

のとき

"v_1, v_2 の定める平行四辺形" の面積 $= |ad - bc|$

Prop. 4.9 $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \bigwedge^{k+l} V^\vee$

Prop 4.10 $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{kl}\, \omega_2 \wedge \omega_1$

Prop 4.11

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1 \cdots v_{k+l})$$

$$= \sum_{\substack{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le k+l \\ 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_l \le k+l \\ \{i_1 \cdots i_k\} \sqcup \{j_1 \cdots j_l\} = \{1, \cdots, k+l\}}} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 \cdots k & k+1 \cdots k+l \\ i_1 \cdots i_k & j_1 \cdots j_l \end{pmatrix} \omega_1(v_{i_1}, \cdots, v_{i_k})\, \omega_2(v_{j_1}, \cdots, v_{j_l})$$

Ex 4.12　V: 2次元とし，$\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$: Vの基底とする．

$\mathcal{B}^\vee = \{w_1, w_2\}$ とすると，$w_1, w_2 \in V^\vee = \overset{1}{\wedge} V^\vee$

このとき

$$w_1 \wedge w_2 : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{matrix} ae_1 \\ + \\ ce_2 \end{matrix}, \begin{matrix} be_1 \\ + \\ de_2 \end{matrix} \right) \mapsto w_1\begin{pmatrix} ae_1 \\ + \\ ce_2 \end{pmatrix} w_2\begin{pmatrix} be_1 \\ + \\ de_2 \end{pmatrix} - w_1\begin{pmatrix} be_1 \\ + \\ de_2 \end{pmatrix} w_2\begin{pmatrix} ae_1 \\ + \\ ce_2 \end{pmatrix}$$

$$= ad - bc$$

$$= \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

特に　$w_1 \wedge w_2 = \omega_{\mathcal{B}} \in \overset{2}{\wedge} V^\vee$　(cf. Ex 4.6)

Prop 4.13 $\left(\overset{k}{\wedge} V^\vee\right) \times \left(\overset{l}{\wedge} V^\vee\right) \to \overset{k+l}{\wedge} V^\vee$

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2$$

は双線型

i.e.

$$(a\omega_1 + b\omega_1') \wedge \omega_2 = a(\omega_1 \wedge \omega_2) + b(\omega_1' \wedge \omega_2)$$

$$\omega_1 \wedge (a\omega_2 + b\omega_2') = a(\omega_1 \wedge \omega_2) + b(\omega_1 \wedge \omega_2')$$

$$\left(a, b \in \mathbb{R},\ \omega_1 \in \overset{k}{\wedge} V^\vee,\ \omega_2 \in \overset{l}{\wedge} V^\vee\right)$$

Prop 4.14 外積 "$\wedge$" は "associative"

i.e. $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$

$$\left(\omega_1 \in \overset{k}{\wedge} V^\vee,\ \omega_2 \in \overset{l}{\wedge} V^\vee,\ \omega_3 \in \overset{s}{\wedge} V^\vee,\ k+l+s \leq m\right)$$

特に $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in V^\vee$ について

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \in \bigwedge^k V^\vee$$

が定義される. $(k \leq m)$

Prop. 4.15

$v_1 \cdots v_k \in V$ について

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(v_1, \cdots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \cdots & \alpha_1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k(v_1) & \cdots & \alpha_k(v_k) \end{pmatrix}$$

Theorem 4.16

$\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_m\}$: V の基底

$\mathcal{B}^\vee = \{w_1, \cdots, w_m\}$: $\mathcal{B}$ の双対基底

$k = 0, 1, \cdots m$ を固定.

このとき

$$\{ w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \cdots \wedge w_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m \}$$

は $\bigwedge^k V^\vee$ の基底

特に $\dim \bigwedge^k V^\vee = \binom{m}{k}$.