前回　§4　微分形式
(第4回)

今回　§5　外微分
(第5回)

講義全体の流れ

1 : 微分形式 ↑ ここまで終わった

2 : 多様体上の積分論

3 : de Rham 理論

今後の予定

§5 : 外微分

§6 : 角付き部分多様体（"積分領域"）

§7 : 1の分割

§8 : 多様体の向き

§9 : 多様体上のリーマン積分

§10 : ストークスの定理 ↑ 1月21日

↓

de Rham 理論へ

§5 外微分

M : m-dim'l C^∞-mfd

$k = 0, 1, \cdots, m-1$ とする.

やりたい事 : C^∞-級 k-form ω を"微分して" (外微分)

$k+1$ form を作ろう!

Recall : f : C^∞-級関数 (i.e. C^∞-級 0-form) on M

$\rightsquigarrow$ (全微分) df : C^∞-級 1-form on M

内容：

- ベクトル場のブラケット
- 外微分の定義と well-definedness ☆
- 外微分の性質

§5.1 : ベクトル場のブラケット

$\mathfrak{X}(M) := \{ C^\infty\text{-級ベクトル場 on } M \}$ とした.

$\mathfrak{X}(M)$ 上のブラケット積

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

を定義しよう.

Def 5.1 : 各 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ と各 $p \in M$ について

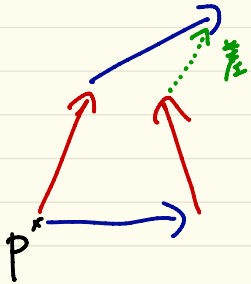
$$[X, Y]_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto X_p(\underbrace{Yf}_{C^\infty(M)}) - Y_p(\underbrace{Xf}_{C^\infty(M)})$$

と定める.

Prop 5.2 $[X, Y]_p \in T_pM$.

(ライプニッツ則に注意)

気持ち　$[X, Y]_p \in T_pM$ は



"Xでちょっと流されてからYでちょっと流される"

と

"Yで　　Xで　　"

の差の"極限"を見ている.

Prop 5.3 $[X, Y] : M \to TM$ は

$$p \mapsto [X, Y]_p$$

C^∞級ベクトル場 on M.

Prop 5.4 $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$

$$(X, Y) \mapsto [X, Y]$$

は双線型 (as $\mathbb{R}$-vector spaces)

Remark : $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ は T_pM の元にはならない

$f \mapsto X_p(Yf)$ （ライプニッツ則を満たさない）

Remark : $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ について

"$[fX, Y] = f[X, Y]$"

とはならない

（$C^\infty(M)$-加群上の演算ではない）

Remark　ブラケット積は associative ではない

i.e. 一般に $[[X,Y],Z] \neq [X,[Y,Z]]$

Prop 5.5 :

(1) 交代性 : $[X,Y] = -[Y,X]$ $(\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M))$

(2) Jacobi律 : $[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$

$(\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M))$

特に $(\mathfrak{X}(M), [\,,\,])$ は(無限次元)リー代数

Ex 5.6 : $M = \mathbb{R}^m$ とする. $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$ について,

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^X \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \left(\xi_i^X, \xi_i^Y \in C^\infty(\mathbb{R}) \right)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^Y \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表示すると,

$$\mathfrak{X}(\mathbb{R}^m) \ni [X, Y] = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\xi_j^X \cdot \frac{\partial \xi_i^Y}{\partial x_j} + \xi_j^Y \cdot \frac{\partial \xi_i^X}{\partial x_j} \right) \right) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}}_{\in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)}$$

つまり $\forall p \in \mathbb{R}^m$ について

$$T_p\mathbb{R}^m \ni [X, Y]_p = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\xi_j^X(p) \cdot \frac{\partial \xi_i^Y}{\partial x_j}(p) + \xi_j^Y(p) \cdot \frac{\partial \xi_i^X}{\partial x_j}(p) \right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

特に ξ_i^X, ξ_i^Y $(i = 1, \cdots, m)$ が定数のとき $[X, Y] \equiv 0$.

外微分のための準備

Theorem 5.7 : $p \in M$ を fix.

このとき $^\exists V$: p の開近傍, $^\exists \varphi : T_pM \to \mathfrak{X}(M)$

$$v \mapsto X(v)$$

s.t.

$$\begin{cases} X(v)_p = v & {}^\forall v \in T_pM \\ [X(v), X(w)] \equiv 0 & \text{on } V \end{cases}$$

Hint: p のまわりで局所座標を用いてベクトル場を作り,
隆起関数を使って M 全体に拡張する.

§5.2 微分形式の外微分

$$M = (M, \mathcal{S}_M) : \ m\text{-dim'l } C^\infty\text{-mfd.}$$

Recall: 各 $k = 0, 1, \cdots, m$ について

$$\Lambda^k(M) := \{ C^\infty\text{-級 } k\text{-forms on } M \}$$

とおいた.

$\Lambda^0(M) \cong C^\infty(M)$ に注意

以下，$k = 0, 1, \cdots, m-1$ とし，

$\omega \in \Lambda^k(M)$，$p \in M$，$v_1, \cdots, v_{k+1} \in T_pM$ を fix.

また $X_1, \cdots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ であって

$$\begin{cases} (X_s)_p = v_s & (s = 1, \cdots, k+1) \\ [X_s, X_t]_p = 0 \end{cases}$$

となるものをとる.

（Theorem 5.7 により存在が保障される）

Def 5.8 :

$$(d\omega)_p(v_1 \cdots v_{k+1} ; X_1, \cdots X_{k+1}) \in \mathbb{R} \text{ を}$$

$$\sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \underbrace{v_s}_{T_pM \text{ の元}} \Big(\overbrace{\omega(X_1 \cdots \underset{\wedge}{} X_{k+1})}^{C^\infty(M) \text{ の元}} \Big) \quad \text{と定める.}$$

X_s は抜く

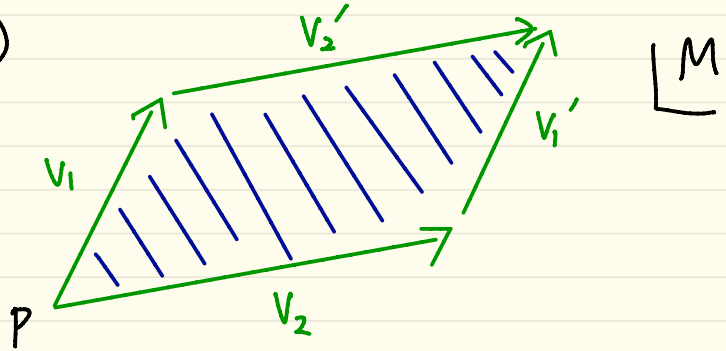
$k=1$ and 2

$$d\omega_p(v_1 v_2 : X_1, X_2)$$

$$:= v_1 \omega(X_2) - v_2 \omega(X_1)$$

気持ち：

（$k=1$ のとき）



$d\omega_p(v_1, v_2)$ を

$$\big(\omega(v_2') - \omega(v_2)\big) - \big(\omega(v_1') - \omega(v_1)\big)$$

の "極限" として定めたい.

難点: 接ベクトル V_2' は "V_2 を V_1 に沿って平行移動したもの" として定義したいところであるが、

"平行移動" は自然には定義できない。

アイデア: ベクトル場を考える!

(ベクトル場達のブラケットがゼロ

⇒ ベクトル場をお互いに流しても" 影響がない)

Question ベクトル場の選び方は重要?

Ans: No!

Key proposition 5.9: $(U, x) \in S_M$ with $p \in U$ を fix

$$\omega|_U \equiv \sum_{\substack{I \subset \{1,\cdots,m\} \\ \#I = k}} \xi_I^U \cdot dx_I \quad (\xi_I^U \in C^\infty(U))$$

と表示する.

このとき

$$(d\omega)_p(v_1, \cdots, v_{k+1}; X_1 \cdots X_{k+1})$$

$$= \sum_{\substack{I \subset \{1,\cdots,m\} \\ \#I = k}} ((d\xi_I^U)_p \wedge (dx_I)_p)(v_1, \cdots, v_{k+1})$$

この命題の証明は今日の最後にまわす.

この先のストーリーを先に見ておく.

Cor 5.10 : $(d\omega)_p(v_1 \cdots v_{k+1} : X_1 \cdots X_{k+1}) \in \mathbb{R}$

は $X_1, \cdots, X_{k+1}$ の選び方に

依らない.

これより

$$(d\omega)_p(v_1 \cdots v_{k+1}) := (d\omega)_p(v_1, \cdots, v_{k+1} : X_1 \cdots X_{k+1})$$

とおく.

Theorem 5.11 $\forall p \in M$, $d\omega_p : \overbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}^{k+1} \to \mathbb{R}$

$$(v_1 \cdots v_{k+1}) \quad (d\omega)_p(v_1 \cdots v_{k+1})$$

は T_pM 上の $k+1$ 次交代形式.

また $d\omega : M \to \bigwedge^{k+1} T^\vee M$ は C^∞-級 $k+1$ form

$$p \mapsto d\omega_p$$

Proof of Thm 5.11 : 前半の主張の証明

$(U, x) \in S_M$ with $p \in U$ をとる.

このとき Prop 5.9 より

$$d\omega_p = \sum_{\substack{I \\ \#I = k}} \underbrace{(d\xi_I^U)_p}_{1\text{次交代形式}} \wedge \underbrace{(dx_I)_p}_{k\text{次交代形式}}$$

特に $d\omega_p$ は $k+1$ 次交代形式.

後半の主張の証明: $d\omega$ が $k+1$-form であることは OK.

$d\omega$ が C^∞-級であることを示す.

$^\forall p \in M$ をとる. p のまわりで C^∞-級であることを示せばよい

$^\forall (U, x) \in S_M$ with $p \in U$ をとる. $d\omega|_U$ が C^∞ を示せば OK.

Prop 5.9 より

$$d\omega|_U = \sum_I \underbrace{(d\xi_I^U)}_{C^\infty\ 1\text{-form}} \wedge \underbrace{(dx_I)}_{C^\infty\ k\text{-form}}$$

これより $d\omega|_U$ は C^∞.

□

Observation

$(U, x) \in S_M$ における ω の局所表示を

$$\omega|_U = \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,m\} \\ \#I = k}} \xi_I^U \cdot dx_I \quad (\xi_I^U \in C^\infty(U))$$

とするとき.

$d\omega$ の局所表示は

$$d\omega|_U = \sum_{\#I = k} \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_I^U}{\partial x_s} dx_s \right) \wedge dx_I$$

$$= \sum_{\substack{J \subset \{1,\dots,m\} \\ \#J = k+1}} \left(\sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l+1} \frac{\partial \xi_{J \setminus \{j_l\}}^U}{\partial x_{j_l}} \right) \cdot dx_J$$

となる.

これで 外微分

$$\begin{aligned} \Lambda^k(M) &\to \Lambda^{k+1}(M) \\ \omega &\mapsto d\omega \end{aligned}$$

が定義された.

Prop 5.12 外微分は線型/$\mathbb{R}$

Prop 5.13 $\omega \in \Lambda^k(M)$, $\eta \in \Lambda^l(M)$ with $k+l \leq m-1$

このとき $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$

特に $d(f\omega) = (df) \wedge \omega + f d\omega$ $(f \in C^\infty(M))$

証明は講義ノートの appendix.

Theorem 5.14 $d(d\omega) \equiv 0$ $\forall \omega \in \Lambda^k(M)$

de Rham 理論の出発点.

de Rham 理論に入ったら示す.

Proposition 5.9 の証明について

より一般に次の定理を示す.

Theorem 5.15 $\omega \in \Lambda^k(M)$ $(k \leq m-1)$ $(U, x) \in S_M$

$Y_1 \cdots Y_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ とし, $\omega|_U = \sum_{\#I=k} \xi_I^U \cdot dx_I$ とする.

このとき

$$\sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} (Y_s)\, \omega(Y_1 \cdots \hat{Y_s} \cdots Y_{k+1}) + \sum_{l<r} (-1)^{l+r} \omega([Y_l, Y_r], Y_1 \cdots \hat{Y_l} \cdots \hat{Y_r} \cdots Y_{k+1})$$

$$= \sum_{\#I=k} (d\xi_I^U \wedge dx_I)(Y_1, \cdots, Y_{k+1})$$

Remark: Prop 5.9 は Theorem 5.15 よりただちに従う.

特に $d\omega \in \Lambda^{k+1}(M)$ が well-defined である事も分かる.

Cor 5.16 $\omega \in \Lambda^k(M)$ $(k \leq m-1)$, $p \in M$,

$v_1, \cdots, v_{k+1} \in T_pM$ とする.

$Y_1, \cdots, Y_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ を "$(Y_s)_p = v_s$" $(s=1,\cdots,k+1)$

となるものとすると, 以下が成り立つ.

$$d\omega_p(v_1 \cdots v_{k+1}) =$$

$$\sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} v_s\left(\omega(Y_1 \cdots \underset{\wedge}{Y_s} \cdots Y_{k+1})\right) + \sum_{l<t} (-1)^{l+t} \omega\left([Y_l, Y_t], Y_1 \cdots \underset{\wedge}{Y_l} \cdots \underset{\wedge}{Y_t} \cdots Y_{k+1}\right)$$

Proof of Theorem 5.15 について：

まず次の Lemma を示す.

Lemma 5.17 : $I = \{i_1 \cdots i_k\} \subset \{1, \cdots, m\}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ とする.

$$\sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \overbrace{Y_s \left(dx_I \left(Y_1 \cdots \underset{\wedge}{Y_s} \cdots Y_{k+1} \right) \right)}^{\in C^\infty(U)}$$

$$+ \sum_{l<t} (-1)^{l+t} dx_I \left([Y_l, Y_t], Y_1 \cdots \underset{\wedge}{Y_l} \cdots \underset{\wedge}{Y_t} \cdots Y_{k+1} \right) = 0$$

次の observation を用いて Prop 5.17 を示す.

Observation $f_{ij} \in C^\infty(U)$, $i, j = 1, \cdots, k$ とし,

$Y \in \mathfrak{X}(U)$ とする.

このとき

$$\underbrace{Y \det\left(f_{ij}\right)}_{C^\infty(U)} = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l+1} \det\begin{pmatrix} Yf_{1l} & \vdots & f_{ij} \\ \vdots & & \\ Yf_{kl} & & \hat{j}_{\neq l} \end{pmatrix}$$

Lemma 5.17 の証明の流れ

Step 1：まず各 $s = 1, \cdots, k+1$ について以下を示す．

$$Y_s\left(dx_I(Y_1 \cdots \underset{\substack{\wedge \\ Y_s}}{} \cdots Y_{k+1})\right)$$

$$= \sum_{l<s} (-1)^{l+1} \det \begin{pmatrix} Y_s(Y_l x_{i_1}) & \vdots & dx_{i_1}(Y_1) & \cdots & dx_{i_1}(Y_{k+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_s(Y_l x_{i_k}) & \vdots & dx_{i_k}(Y_1) & \cdots & dx_{i_k}(Y_{k+1}) \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{s<l} (-1)^{l} \det \begin{pmatrix} Y_s(Y_l x_{i_1}) & \vdots & dx_{i_1}(Y_1) & \cdots & dx_{i_1}(Y_{k+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_s(Y_l x_{i_k}) & \vdots & dx_{i_k}(Y_1) & \cdots & dx_{i_k}(Y_{k+1}) \end{pmatrix}$$

$\hat{Y}_l$ $\hat{Y}_s$ $\hat{Y}_s$ $\hat{Y}_l$

Hint：dx_I の定義と先の Observation を使う．

"$dx_i(Y_l) = Y_l(x_i)$" も使う

Step 2 :

$$\sum_{s=1}^{m+1} (-1)^{s+1} Y_s \left(d\alpha_I (Y_1, \cdots, \underset{\substack{\wedge \\ Y_s}}{}, Y_{k+1}) \right)$$

$$= (-1) \sum_{l<s} (-1)^{l+s} \det \begin{pmatrix} [Y_l, Y_s](\alpha_{i_1}) & \vdots & d\alpha_{i_1}(Y_1) & \cdots & d\alpha_{i_1}(Y_{k+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [Y_l, Y_s](\alpha_{i_k}) & \vdots & d\alpha_{i_k}(Y_1) & \cdots & d\alpha_{i_k}(Y_{k+1}) \end{pmatrix}$$

$$\hat{Y}_l \quad \hat{Y}_s$$

を示す.

Hint : Step 1の結果を左辺に代入して,
うまく変数変換しながら整理する.

Step3 : Step2 の右辺 で

$$(-1)\sum_{l<t}(-1)^{l+t}\,dx_I([Y_l,Y_t],Y_1,\dots,\hat{Y_l},\dots,\hat{Y_t},\dots,Y_{k+1})$$

と等しい事を示す。 $\rightsquigarrow$ 約束すると Lemma 5.17 で得られる。

Hint : 変数 s は t に置き換える。

$[Y_l,Y_t](x_i) = dx_i([Y_l,Y_t])$ に注意する。

$\boxtimes$

Lemma 5.17 を用いて Theorem 5.15 を示そう.

まず $\omega|_U = \sum_{\#I=k} \xi_I^U \cdot dx_I$ と局所表示した事に注意しておく.

Step 1: $\displaystyle\sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} Y_s(\omega(Y_1 \cdots \hat{Y_s} \cdots Y_{k+1}))$

$$= \sum_{\substack{I \subset \{1,\cdots,m\} \\ \#I=k}} \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} (Y_s \xi_I^U) \cdot dx_I(Y_1 \cdots \hat{Y_s} \cdots Y_{k+1})$$

$$+ \sum_{\substack{I \subset \{1,\cdots,m\} \\ \#I=k}} \xi_I^U \cdot \left(\sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} Y_s (dx_I(Y_1 \cdots \hat{Y_s} \cdots Y_{k+1})) \right)$$

を示す.

Step 1 の証明： $\omega|_U$ の表示とライプニッツ則に気を付けて計算する.

具体的には

$$\sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} Y_s\left(\omega\left(Y_1 \cdots \underset{\hat{Y_s}}{\wedge} Y_{k+1}\right)\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} Y_s\left(\sum_I \xi_I^U \cdot dx_I\left(Y_1 \cdots \underset{\hat{Y_s}}{\wedge} Y_{k+1}\right)\right) \qquad (\because \omega|_U \text{ の表示})$$

$$= \sum_{s=1} (-1)^{s+1} \sum_I \left(\left(Y_s \xi_I^U\right) \cdot dx_I\left(Y_1 \cdots \underset{\hat{Y_s}}{\wedge} Y_{k+1}\right) + \xi_I^U \cdot Y_s\, dx_I\left(Y_1 \cdots \underset{\hat{Y_s}}{\wedge} Y_{k+1}\right)\right)$$

$$(\because \text{ライプニッツ則})$$

$$= \sum_I \sum_s (-1)^{s+1} \left(Y_s \cdot \xi_I^U\right) \cdot dx_I\left(Y_1 \cdots \underset{\hat{Y_s}}{\wedge} Y_{k+1}\right) + \sum_I \xi_I^U \sum_s (-1)^{s+1} Y_s\, dx_I\left(Y_1 \cdots \underset{\hat{Y_s}}{\wedge} Y_{k+1}\right)$$

$\blacksquare$

Step 2 : Theorem 5.15 の claim

$$\sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} Y_s \omega(Y_1 \cdots \hat{Y_s} \cdots Y_{k+1}) + \sum_{l<t} (-1)^{l+t} \omega([Y_l, Y_t], Y_1 \cdots \hat{Y_l} \cdots \hat{Y_t} \cdots Y_{k+1})$$

$$= \sum_{\substack{I \subset \{1, \cdots m\} \\ \# I = k}} (d\xi_I^U \wedge dx_I)(Y_1 \cdots Y_{k+1})$$

を示す.

Step 2 の証明: Step 1 と Lemma 5.17 より

$$\text{左辺} = \sum_I \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} (Y_s \xi_I^U) \cdot dx_I(Y_1, \cdots, \hat{Y_s}, Y_{k+1})$$ を得る.

更に "$Y_s \xi_I^U = d\xi_I^U(Y_s)$" と外積の性質 (Prop 4.11) に注意すると

上記の claim を得る. ∎

Appendix

Prop 5.13 (再掲) $\omega \in \Lambda^k(M)$, $\eta \in \Lambda^l(M)$ with $k+l \leq m-1$

このとき $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$

Prop 5.13 の証明 : $p \in M$, $X_1 \cdots X_{k+l+1} \in \mathfrak{X}(M)$

with $[X_s, X_t]_p = 0 \quad \forall s, t$

を任意にとる.

$v_s = (X_s)_p \in T_pM \ (s = 1, \cdots, k+l+1)$ とおく

示 $d(\omega \wedge \eta)_p(v_1 \cdots v_{k+l+1}) = (d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta)_p(v_1 \cdots v_{k+l+1})$

Step 1 :

$$d(\omega \wedge \eta)_p(v_1 \cdots v_{k+l}) =$$

$$\frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\begin{array}{c} v_{\sigma(1)}\left(\omega(X_{\sigma(2)}, \cdots, X_{\sigma(k+1)})\right) \cdot \eta_p(v_{\sigma(k+2)}, \cdots, v_{\sigma(k+l+1)}) \\ + \\ \omega_p(v_{\sigma(2)} \cdots v_{\sigma(k+1)}) \cdot v_{\sigma(1)}\left(\eta(X_{\sigma(k+2)}, \cdots, X_{\sigma(k+l+1)})\right) \end{array} \right)$$

E.T.Q.

Step 1 の証明:

左辺 $= \displaystyle\sum_{s=1}^{k+l+1} (-1)^{s+1} v_s(\omega\wedge\eta)(X_1 \cdots \underset{\wedge}{X_s} \cdots X_{k+l+1})$

$$= \sum_s (-1)^{s+1} v_s\left(\frac{1}{k!\,l!}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l+1}\\ \sigma(1)=s}} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & \overbrace{\quad}^{s\text{を除く}} & k+l+1\\ \sigma(2) & \cdots & & & \sigma(k+l+1)\end{pmatrix} \omega(X_{\sigma(2)}\cdots X_{\sigma(k+1)}) \cdot \eta(X_{\sigma(k+2)}\cdots X_{\sigma(k+l+1)})\right)$$

(∵ 外積の定義)

$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{s=1}^{k+l+1} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1} \\ \sigma(1) = s}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, v_s\, \omega(X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k+1)}) \cdot \eta(X_{\sigma(k+2)} \dots X_{\sigma(k+l+1)})$$

$$\left(\because \; (-1)^{s+1} \cdot \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \overset{s}{\vee} & k+l+1 \\ \sigma(2) & \cdots & & \sigma(k+l+1) \end{pmatrix} = \operatorname{sgn}(\sigma) \quad \text{if } \sigma(1) = s \right)$$

$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, v_{\sigma(1)}\, \omega(X_{\sigma(2)} \dots X_{\sigma(k+1)}) \cdot \eta(X_{\sigma(k+2)}, \dots, X_{\sigma(k+l+1)})$$

$$\left(\because \; \text{“} \sum_{s=1}^{k+l+1} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1} \\ \sigma(1) = s}} \text{”} = \text{“} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \text{”} \right)$$

$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \mathrm{sgn}(\sigma) \left(\begin{array}{c} v_{\sigma(1)}\left(\omega\left(X_{\sigma(2)}, \cdots, X_{\sigma(k+1)}\right)\right) \cdot \eta_p\left(v_{\sigma(k+2)}, \cdots, v_{\sigma(k+l+1)}\right) \\ + \\ \omega_p\left(v_{\sigma(2)} \cdots v_{\sigma(k+1)}\right) \cdot v_{\sigma(1)}\left(\eta\left(X_{\sigma(k+2)}, \cdots, X_{\sigma(k+l+1)}\right)\right) \end{array} \right)$$

(∵ ライプニッツ則)

= Step 1 の証明 ∎

Step 2 :

$$(d\omega_p \wedge \eta_p)(v_1 \cdots v_{k+l+1})$$

$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l+1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, v_{\sigma(1)}\, \omega(X_{\sigma(2)} \cdots X_{\sigma(k+1)})\, \eta_p(v_{\sigma(k+2)} \cdots v_{\sigma(k+l+1)})$$

を示す.

<u>Step 2 の証明</u>

$$(d\omega_p \wedge \eta_p)(v_1 \cdots v_{k+l+1})$$

$$= \frac{1}{(k+1)!\,l!} \sum_{\tau \in S_{k+l+1}} \operatorname{sgn}(\tau)\, d\omega_p(v_{\tau(1)} \cdots v_{\tau(k+1)})\, \eta_p(v_{\tau(k+2)} \cdots v_{\tau(k+l+1)})$$

$$= \frac{1}{(k+1)!\,l!} \sum_{\tau} \operatorname{sgn}(\tau) \left(\sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} v_{\tau(s)}\, \omega(X_{\tau(1)} \cdots X_{\tau(k+1)}) \right) \eta_p(v_{\tau(k+2)} \cdots v_{\tau(k+l+1)})$$

$$= \frac{1}{(k+1)!\,l!} \sum_{\tau} \operatorname{sgn}(\tau) \left(\sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} v_{\tau(s)}\, \omega(X_{\tau(1)} \cdots X_{\tau(k+1)}) \right) \eta_p(v_{\tau(k+2)} \cdots v_{\tau(k+l+1)})$$

$$= \frac{1}{k!\,l!} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \sum_{s=1}^{k+1} \operatorname{sgn}(\sigma)\, v_{\sigma(1)}\, \omega(X_{\sigma(2)} \cdots X_{\sigma(k+1)})\, \eta_p(v_{\sigma(k+2)} \cdots v_{\sigma(k+l+1)}) \right)$$

($\tau = \tau'$ に対し $\sigma := \tau \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & s & s+1 & \cdots & k+l+1 \\ s & 1 & \cdots & s-1 & s+1 & \cdots & k+l+1 \end{pmatrix}$ とする.)

巡回置換

$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, v_{\sigma(1)}\, \omega(X_{\sigma(2)} \cdots X_{\sigma(k+1)})\, \eta_p(v_{\sigma(k+2)} \cdots v_{\sigma(k+l+1)})$$

($\because$ " $\frac{1}{k+1} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \sum_{s=1}^{k+1}$ " $=$ " $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}}$ "

for $\sigma = \tau \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & s & s+1 & \cdots & k+l+1 \\ s & 1 & 2 & \cdots & s-1 & s+1 & \cdots & k+l+1 \end{pmatrix}$)

$\blacksquare$

Step 3 :

$$(-1)^k(\omega_p \wedge dg_p)(v_1 \cdots v_{k+l+1})$$

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega_p(v_{\sigma(2)} \cdots v_{\sigma(k+1)}) \cdot v_{\sigma(1)}\big(g(X_{\sigma(k+2)}, \cdots, X_{\sigma(k+l+1)})\big)$$

ξ 示.了 .

Step 3 の証明

$$(-1)^k(\omega_p \wedge dg_p)(v_1 \cdots v_{k+l+1})$$

$$= (-1)^k \frac{1}{k!(l+1)!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \operatorname{sgn}(\tau)\, \omega_p(v_{\tau(1)} \cdots v_{\tau(k)})\, dg_p(v_{\tau(k+1)} \cdots v_{\tau(k+l+1)})$$

$$= (-1)^k \frac{1}{k!(l+1)!} \sum_{\tau} \operatorname{sgn}(\tau)\, \omega_p(v_{\tau(1)} \cdots v_{\tau(k)}) \sum_{s=1}^{l+1} (-1)^{s+1} v_{\tau(k+s)}\big(g(X_{\tau(k+1)} \cdots \widehat{X_{\tau(k+s)}} \cdots X_{\tau(k+l+1)})\big)$$

$$= \frac{1}{k!\,l!}\,\frac{1}{l+1}\sum_{\tau}\sum_{s}(-1)^{k+s+1}\operatorname{sgn}(\tau)\,\omega_p(v_{\tau(1)}\cdots v_{\tau(k)})\,v_{\tau(k+s)}\Big(g\big(X_{\tau(k+1)}\cdots \underset{\substack{\wedge\\ X_{\tau(k+s)}}}{\cdots} X_{\tau(k+l+1)}\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{k!\,l!}\,\frac{1}{l+1}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{k+l+1}}\sum_{s=1}^{l+1}\operatorname{sgn}(\sigma)\,\omega_p(v_{\sigma(2)}\cdots v_{\sigma(k+1)})\,v_{\sigma(1)}\Big(g\big(X_{\sigma(k+2)}\cdots X_{\sigma(k+l+1)}\big)\Big)$$

$\tau = \tau\circ 1$ $\quad \sigma = \tau\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & k+1 & k+2 & \cdots & k+s & k+s+1 & \cdots & k+l+1\\ k+s & 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & k+s-1 & k+s+1 & \cdots & k+l+1\end{pmatrix}$ と可.

巡回置換

$$= \frac{1}{k!\,l!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l+1}}\operatorname{sgn}(\sigma)\,\omega_p(v_{\sigma(2)},\cdots,v_{\sigma(k+1)})\,v_{\sigma(1)}\big(g(X_{\sigma(k+2)},\cdots,X_{\sigma(k+l+1)})\big)$$

$$\left(\text{☺}\quad \text{“}\frac{1}{l+1}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{k+l+1}}\sum_{s=1}^{l+1}\text{”} = \text{“}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l+1}}\text{”}\quad \text{for } \sigma = \tau\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k+s & k+s+1 & \cdots & k+l+1\\ s & 1 & \cdots & k+s-1 & k+s+1 & \cdots & k+l+1\end{pmatrix}\right)$$

Step 1, 2, 3 の結果やらてたらに

$$d(\omega \wedge \eta)_p (v_1 \cdots v_{k+l+1})$$

$$= (d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta)_p (v_1 \cdots v_{k+l+1})$$

を得る.

Prop 5.13の証明

終わり

$\blacksquare$