前回 §7 角付き多様体
(第6回)

今日 §8 1の分割
(第7回) §9 多様体の向き

§8 1の分割

Recall: 隆起関数 (cf §2) は

"局所的に定義できているものを
全体に延長する"のに便利

(例えば Cor 2.5)

1の分割 は更に進化して

"各点のまわりで定義されているものを貼り合わせて
全体で定義する" のに便利

内容：

- 1の分割の定義
- 1の分割の存在定理

§8.1：位相空間上の1の分割

X：位相空間

$\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$：$X$の部分集合族とする.

Def 8.1：$\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$が局所有限 (locally finite)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x\in X$, $\exists V_x$：xのopen nbd

s.t. $\Lambda(V_x) := \{\lambda\in\Lambda \mid C_\lambda\cap V_x\neq\emptyset\}$

が有限.

Def 8.2（復習）

$f : X \to \mathbb{R}$ について

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

Xにおける閉包

$\mathcal{U}$: X の open cover とする.

Def 8.3 (1の分割)

X 上の連続関数の族 $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が

$\mathcal{U}$ に従う 1の分割 (partition of unity subordinate to $\mathcal{U}$)

PUS to $\mathcal{U}$ と略す

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(1) $\varphi_\lambda(x) \in [0,1]$ $({}^\forall\lambda, {}^\forall x)$

(2) ${}^\forall\lambda\in\Lambda$, ${}^\exists U \in \mathcal{U}$ s.t. $\operatorname{supp}\varphi_\lambda \subset U$

(3) $\{\operatorname{supp}\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は局所有限

(4) $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(x) = 1$ $({}^\forall x\in X)$ ((3)より左辺は有限和)

例 8.4 $\quad X = \mathbb{R}$

$$\mathcal{U} = \{ U_n := (n-1, n+1) \}_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{とし}$$

$$\{ \varphi_n \}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ を } \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & n - \frac{1}{3} \le x \le n + \frac{1}{3} \\ 3\left(x - \left(n - \frac{2}{3}\right)\right) & n - \frac{2}{3} \le x < n - \frac{1}{3} \\ -3\left(x - \left(n + \frac{1}{3}\right)\right) + 1 & n + \frac{1}{3} < x \le n + \frac{2}{3} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと PUS to $\mathcal{U}$.

定義が流儀によって異なるので注意

この講義では積分論が展開しやすい定義を採用した

別の流儀(主流はこちら)

<u>Def 8.5</u> : $\{\psi_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ が"強い意味"で $\mathcal{U}$ に従う1の分割

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

① $\psi_U : X \to [0,1]$: 連続

② $\operatorname{supp}\psi_U \subset U$

③ $\{\operatorname{supp}\psi_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ は局所有限

④ $\sum_{U\in\mathcal{U}} \psi_U(x) = 1 \quad (\forall x \in X)$

Remark : Def 8.4 の意味の PUS to $\mathcal{U}$ から

選択公理を用いて Def 8.5 の意味の

PUS to $\mathcal{U}$ が構成できる.

応用例 8.6 : $\{\psi_U\}_{U\in\mathcal{U}}$: PUS to $\mathcal{U}$ in Def 8.5 とする.

$\{f_U : U \to \mathbb{R}_{>0}\}_{U\in\mathcal{U}}$: 正値連続関数の族 に対して

$$f : X \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \sum_{U\in\mathcal{U}} f_U(x)\cdot\psi_U(x)$$

は well-defined, 連続 かつ 正値.

この講義では用いないが以下の定理が成りたつ.

Theorem 8.7 : X がパラコンパクトかつ Hausdorff とする.

このとき

$$\forall \mathcal{U} : X \text{ の open cover}$$
$$\exists \{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} : \text{PUS to } \mathcal{U}$$

(X がパラコンパクト $\underset{\text{def}}{\longleftrightarrow}$ $\forall \mathcal{U} : X$ の open cover
$\exists \mathcal{U}' : X$ の locally finite open cover
s.t. $\forall O \in \mathcal{U}', \exists \tilde{O} \in \mathcal{U}$ s.t. $O \subset \tilde{O}$)

§8.2 判様体上の1の分割

Ω : k-dim'l C^∞-mfd with corners とする.

このとき次の定理が成り立つ.

Theorem 8.8

$^\forall \mathcal{U}$: Ω の open cover

$^\exists \{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: PUS to $\mathcal{U}$

s.t. $\psi_\lambda \in C^\infty(\Omega)$ $(^\forall \lambda \in \Lambda)$

この定理の証明には第二可算公理, Hausdorff性を用いる.

証明は付録ノートとしてアップロード予定.

応用例（この講義では使わない）

Theorem 8.9 : 任意の C^∞-mfd はリーマン計量を持つ.
特に距離化可能.

Hint : 各座標で計量を定義しておいて,
応用例 8.6 と同じアイデアで
全体で貼り合わせる.

Hausdorff性の使いどころ：

以下のLemmaがTheorem 8.8の証明で重要

Lemma 8.10：

$(U, x) \in S_\Omega$

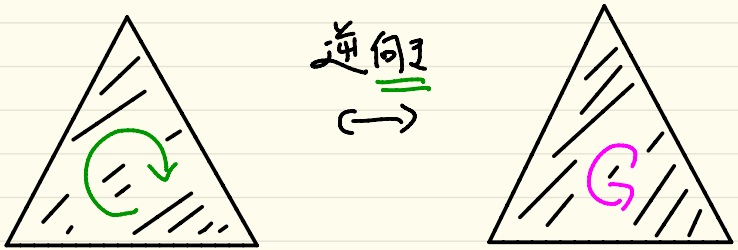
$\underset{\text{compact}}{A} \subset x(U) \subset \mathbb{C}_k$ とする.

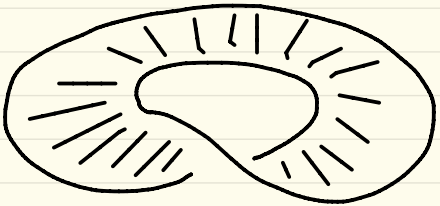
このとき $x^{-1}(A) \subset \Omega$ は閉

"Hausdorff空間のcompact subsetは閉" を用いた.

このLemmaはTheorem 2.4の証明でも使っている.
(bump functionの存在定理)

§9：多様体の向き





Möbius の帯は

向き付け不可能な境界付き多様体

"向き"はどうやって定義する？

内容：

- 何まの定義
- 何まの分類

§9.1 : 多様体の向き

$\Omega = (\Omega, S_\Omega)$: k-dim'l C^∞-mfd w.c.

Def 9.1 :

$$S_\Omega^{conn} := \{ (U, x) \in S_\Omega \mid U \text{ は連結} \}$$

とおく.

Prop 9.2 : S_Ω^{conn} は Ω 上の atlas

特に $\displaystyle\bigcup_{(U,x) \in S_\Omega^{conn}} U = \Omega$

Ω 上の向き σ を定義しよう

Def 9.3：写像 $\sigma : S_\Omega^{comm} \to \{1, -1\}$ が (Ω, S_Ω) の向き

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall(U, x), {}^\forall(V, y) \in S_\Omega^{comm}$ with $U \cap V \neq \emptyset$

について以下が成り立つ：

(i) $\sigma(U, x) \cdot \sigma(V, y) = 1$ のとき

$\det J_{x(p)}(y \circ x^{-1}) > 0 \quad ({}^\forall p \in U \cap V)$

(ii) $\sigma(U, x) \cdot \sigma(V, y) = -1$ のとき

$\det J_{x(p)}(y \circ x^{-1}) < 0 \quad ({}^\forall p \in U \cap V)$

☆

Recall: $p \in U \cap V$ について

$$J_{x(p)}(y \circ x^{-1}) := \left(\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)_{x(p)} \right)_{i,j=1,\cdots,k}$$

Theorem 9.4 (Thm 1.14 の別付き version)

$v \in T_p\Omega$ について

$$v = \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{j=1}^{k} b_j \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p \qquad \begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R} \\ b_1, \cdots, b_k \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = J_{x(p)}(y \circ x^{-1}) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

Remark: 本講義での向きの定義はかなり特殊な形である。
積分論に使いやすい形を採用した。

よくある定義は以下のようなものであるが、
この講義の定義と"同値"である。

Ωの向きとは…

各点pにおいて $\underbrace{\overset{k}{\wedge} T_p^\vee M}_{\substack{1\text{次元} \\ (k=\dim\Omega)}} \setminus \{0\}$ の連結成分を指定したもの

ただし指定の仕方はpについて"連続" (厳密に述べるには fiber束の言葉で必要)

次の定理が成り立つ

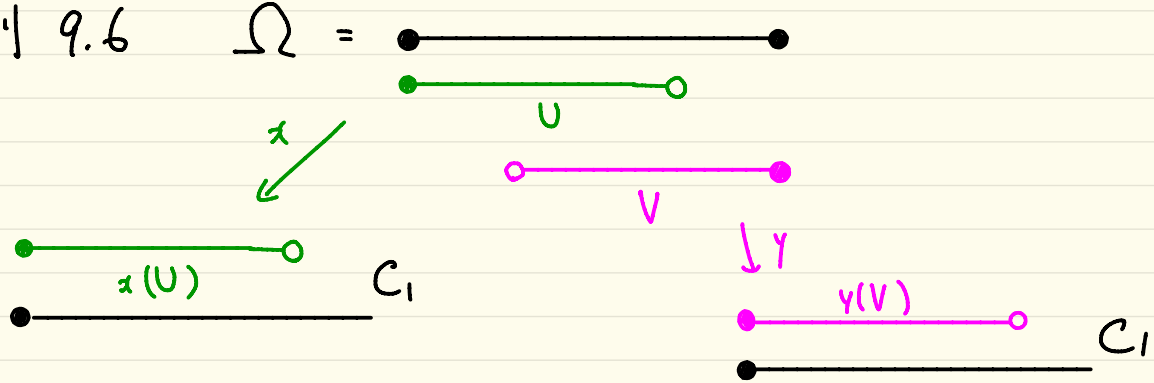
Theorem 9.5: $S \subset S_\Omega^{\mathrm{conn}}$ を Ω 上の C_k-atlas とする.

(see Section 7)

$$\{\Omega \text{ 上の向き}\} \ni \sigma \longmapsto \sigma|_S \in \{\sigma_S : S \to \{1,-1\} \mid \forall (U,x),(V,y) \in S \text{ with } U \cap V \neq \emptyset \text{ は Def 9.3 の } (*) \text{ を満たす}\}$$

$$\{\Omega \text{ 上の向き}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\sigma_S : S \to \{1,-1\} \mid \forall (U,x),(V,y) \in S \text{ with } U \cap V \neq \emptyset \text{ は Def 9.3 の } (*) \text{ を満たす}\}$$

例 9.6



このとき $\det J_{x(p)}(y \circ x^{-1}) < 0 \quad (\forall p \in U \cap V)$

特に $\sigma_1, \sigma_2 : \underset{\{(U,x),(V,y)\}}{S} \longrightarrow \{1,-1\}$ を

$\sigma_1(U,x) = 1,\ \sigma_1(V,y) = -1$

$\sigma_2(U,x) = -1,\ \sigma_2(V,y) = 1$

とすると σ_1, σ_2 は Ω 上の向きを定める.

σ_1 と σ_2 は "逆向き"

§9.2 向きの分類

Ω が連結のとき 次が成り立つ:

Theorem 9.7: Ω: 連結 k-dim'l C^∞-mfd w.c. とする.

このとき

$$\#\{\Omega\text{上の向き}\} = \begin{cases} 2 & \left(\text{if } \begin{array}{l}\text{1次元ベクトル束 } \Lambda^k T^*\Omega \\ \text{の群束が主ファイバー束} \\ \text{として自明}\end{array}\right) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Corollary 9.8: Ω: 連結かつ単連結とする.

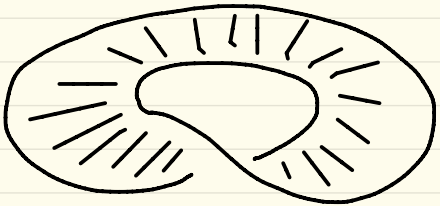
このとき $\#\{\Omega\text{上の向き}\} = 2$

例 9.9：

は 向きは 2種類

（連結単連結なので）

例 9.10：



Möbius の帯は

{向き} = $\emptyset$

例 9.10 の証明：

以下の Observation は向きの定義から直ちに従う：

Observation 9.11：

$\Omega = (\Omega, S_\Omega)$: k-dim'l C^∞-mfd w.c. とする.

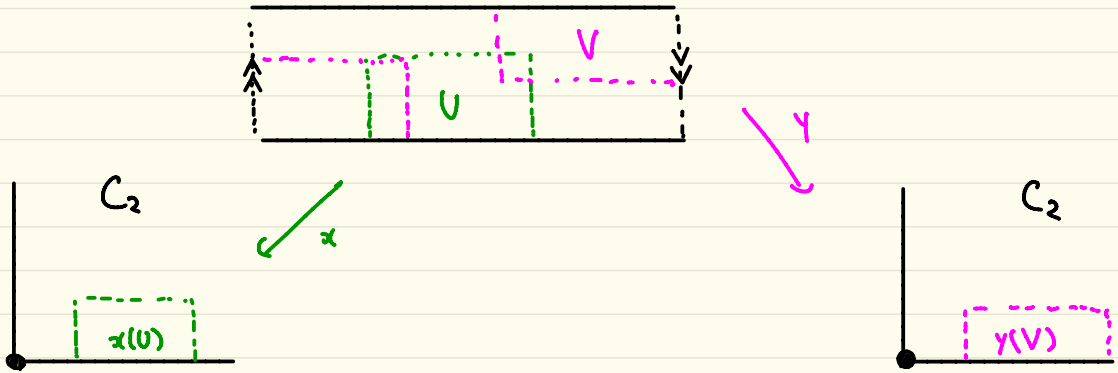
$(U, x), (V, y) \in S_\Omega^{conn}$ であって以下の条件を満たす p が

存在するとき, $\{\Omega の向き\} = \emptyset$

条件 : $\exists\, p, q \in U \cap V$ s.t. $\det J_{x(p)}(y \circ x^{-1}) > 0$ かつ

$\det J_{x(q)}(y \circ x^{-1}) < 0$

Möbius の帯 の 局所座標 (U, x), (V, y) を



のようにとると、Obs 9.11 の条件を満たしてしまうので

$\{$ Möbius の帯 の 向き $\} = \emptyset$ ∎