前回
(第7回)

§8：1の分割

§9：多様体の向き

今回

§10：多様体上のリーマン積分

§10 多様体上のリーマン積分

(Ω, σ) : k-dim'l C^∞-mfd with corners とその向き

ω : C^∞-級 k-form on Ω とする.

ゴール : $f : \Omega \to \mathbb{R}$ with $\mathrm{supp} f$: compact

について

"リーマン積分" $\displaystyle\int_{(\Omega,\sigma)} f\omega \in \mathbb{R}$ を定義する.

3段階で考える：

Step 1： f が C_k 上の support compact fct の場合の C_k 上のリーマン積分

（ポイント：引変数のリーマン積分）

Step 2： f の support が座標近傍 U に含まれる場合の Ω 上のリーマン積分

（ポイント：最高次形式の座標変換と向き）

Step 3： Support compact continuous function についての Ω 上のリーマン積分

（ポイント：1の分割）

内容：

- C_k 上のリーマン積分と
  変数変換公式

- 台が compact な連続関数 on Ω
  のリーマン積分

言葉の準備：

<u>Def 10.1</u>：X：位相空間について

$C_c(X) := \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f$ は連続，$\mathrm{supp} f$ は compact $\}$

とおく．

§10.1 : C_k 上のリーマン積分

Recall: $C_k := \{ x = (x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_i \geq 0 \ (\forall i) \}$

$f \in C_c(C_k)$ を1つ選んで固定する.

Observation 10.2 : このとき

$R_1, \cdots, R_k > 0$ が存在して,

$$\operatorname{supp} f \subset [0, R_1] \times \cdots \times [0, R_k]$$

Def 10.3:

$$I_{C_k}(f) := \underbrace{\int_0^{R_k} \cdots \left(\int_0^{R_2} \left(\int_0^{R_1} f(x_1 \cdots x_k)\, dx_1 \right) dx_2 \right) \cdots dx_k}_{\text{累次積分}}$$

$$\left(= \int_0^{R_k} dx_k \cdots \int_0^{R_2} dx_2 \int_0^{R_1} dx_1 \; f(x_1 \cdots x_k) \right)$$ とおく.

Remark:

- $I_{C_k}(f)$ は $R_1 \cdots R_k > 0$ の選び方に依らない.
- f が連続であることから累次積分の順番は替えてもよい.

また $I_{C_k}(f)$ を $[0, R_1] \times \cdots \times [0, R_k]$ 上の重積分（リーマン和の極限）とみなしてもよい（フビニの定理）

Prop 10.4 :

$C_c(C_k) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto I_{C_k}(f)$

(ベクトル空間)

は positive な 線型汎関数

$$\left(\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \ (\forall x \in C_k) \\ \quad \Rightarrow \int_{C_k} f \, dx_1 \cdots dx_k \geq 0 \end{array} \right)$$

⑥ 座標変換

$U \underset{\text{open}}{\subset} C_k$, $V \underset{\text{open}}{\subset} C_k$, $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$: C^∞-diffeo

（φ は全単射で φ, φ^{-1} は共に Def 7.1 の意味で C^∞-級）

とする.

また $f \in C_c(C_k)$ で $\operatorname{supp} f \subset V$ を満たすとする.

Theorem 10.5（変数変換公式）

$$I_{C_k}(f) = I_{C_k}\big(\underbrace{(f \circ \varphi)}_{\operatorname{supp} \subset U} \cdot \underbrace{|\det J\varphi|}_{U\text{上の連続関数}}\big)$$

ただし $|\det J\varphi| : U \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \left|\det\left(\left.\frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_i}\right|_{x=p}\right)_{i,j}\right|$

§10.2 Ω上のリーマン積分

(Ω, σ) : k-dim'l C^∞-mfd with corners とその向き

ω : C^∞-級 k-form on Ω とする.

Recall :

- $S_\Omega^{conn} := \{ (U, x) \in S_\Omega \mid U$ は連結$\}$
- $\sigma : S_\Omega^{conn} \to \{+1, -1\}$
- 各 $(U, x) \in S_\Omega^{conn}$ について

  $\exists! \, \xi_U \in C^\infty(U)$ s.t. $\omega|_U \equiv \xi_U \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$

まず $f \in C_c(\Omega)$ で次の性質(☆)を満たすものを考える.

性質(☆) : $\exists (U, x) \in S_\Omega^{conn}$ s.t. $\mathrm{supp} f \subset U$

Def 10.6 このとき

$$\int_{(\Omega,\sigma)} f\omega := \sigma(U,x) \cdot I_{C_k}((f \cdot \xi_I) \circ x^{-1}) \in \mathbb{R}$$ と定める.

$x(U)$ に support を持つ C_k 上の連続関数

Prop 10.7 $\int_{(\Omega,\sigma)} f\omega$ は $(U,x) \in S_\Omega^{conn}$ の選び方に依らない

Prop 10.7 の証明：

$(U, x), (V, y) \in S_\Omega^{\mathrm{conn}}$ について

$\mathrm{supp}\, f \subset U$ かつ $\mathrm{supp}\, f \subset V$ であるとする.

ω の局所表示をそれぞれ

$$\omega|_U \equiv \xi_U \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \quad (\xi_U \in C^\infty(U))$$

$$\omega|_V \equiv \xi_V \, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k \quad (\xi_V \in C^\infty(V))$$ とする.

示 $\sigma(U, x) I_{C_k}((f \cdot \xi_U) \circ x^{-1}) = \sigma(V, y) I_{C_k}((f \cdot \xi_V) \circ y^{-1})$

$f \equiv 0$ の場合は両辺共にゼロなので OK.

$f \not\equiv 0$ とする.

特に $\emptyset \neq \mathrm{supp}\, f \subset U \cap V$ となる.

向きの定義より

$$\sigma(V, Y)\cdot\left|\det J_{x(p)}(Y\circ x^{-1})\right| = \sigma(U, x)\cdot\det J_{x(p)}(Y\circ x^{-1})$$

が $\forall p \in U\cap V$ で成り立つことに注意しておく.

またこのとき以下の Lemma が成り立つ:

Lemma 10.8:

$$\xi_U(p) = \xi_V(p)\cdot\det J_{x(p)}(Y\circ x^{-1}) \quad (\forall p \in U\cap V)$$

特に $\xi_U\circ x^{-1} = (\xi_V\circ x^{-1})\cdot\det J(Y\circ x^{-1})$ on $x(U\cap V)$

(この Lemma の証明は後まわし.)

これらの注意と Theorem 10.5 より

$$\sigma(V,y)\, I_{C_k}\big(\underbrace{(f\cdot\xi_V)\circ y^{-1}}\big)$$

supp $\subset y(U\cap V)$ とみなし C_k 上の連続関数とみなす

$$= \sigma(V,y)\, I_{C_k}\big((f\cdot\xi_V)\circ y^{-1}\circ y\circ x^{-1}\cdot |\det J(y\circ x^{-1})|\big) \qquad (\because \text{Thm } 10.5)$$

$$= I_{C_k}\big((f\circ x^{-1})\cdot(\xi_V\circ x^{-1})\cdot \sigma(V,y)\cdot |\det J(y\circ x^{-1})|\big)$$

$$= I_{C_k}\big((f\circ x^{-1})\cdot(\xi_V\circ x^{-1})\cdot \sigma(U,x)\cdot \det J(y\circ x^{-1})\big)$$

$$= \sigma(U,x)\, I_{C_k}\big((f\circ x^{-1})\cdot(\xi_V\circ x^{-1})\cdot \det J(y\circ x^{-1})\big)$$

$$= \sigma(U,x)\, I_{C_k}\big((f\circ x^{-1})\cdot(\xi_U\circ x^{-1})\big) \qquad (\because \text{Lemma } 10.8)$$

$$= \sigma(U,x)\, I_{C_k}\big((f\cdot\xi_U)\circ x^{-1}\big)$$

∎

Lemma 10.8 の証明：$^\forall p \in U \cap V$ をとる．

$\xi_U(p) = \omega_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\right)$ となることに注意する．

示 $\underbrace{\xi_V(p)\left((dy_1)_p \wedge \cdots \wedge (dy_k)_p\right)}_{\omega_p}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\right)$

$= \xi_V(p) \det J_{x(p)}(Y \circ x^{-1})$

特に以下を示せば十分

$\left((dy_1)_p \wedge \cdots \wedge (dy_k)_p\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\right)$

$= \det J_{x(p)}(Y \circ x^{-1})$

左辺 $= \left((dy_1)_p \wedge \cdots \wedge (dy_k)_p\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\right)$

$$= \det \begin{pmatrix} (dy_1)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p & \cdots & (dy_1)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (dy_k)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p & \cdots & (dy_k)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p \end{pmatrix} \quad (\because \text{Prop } 4.15)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p (y_1) & \cdots & \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p (y_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p (y_k) & \cdots & \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p (y_k) \end{pmatrix}$$

$$= \det J_{x(p)}(y \circ x^{-1}) = \text{右辺}$$

(see Section 1.2) ∎

次に一般の $f \in C_c(\Omega)$ について考える.

$\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を Ω 上の

弱い意味で $\{U \mid (U,x) \in S_\Omega^{\mathrm{conn}}\}$ に従う1の分割

(PUS to $\{U \mid (U,x) \in S_\Omega^{\mathrm{conn}}\}$)

とする.

(Thm 8.8 より存在が保障される.)

Remark : ここでは "$\psi_\lambda \in C^\infty(\Omega)$ $(\forall \lambda \in \Lambda)$" は満たさなくてもよいこととする.

各 $\lambda \in \Lambda$ について

$$\operatorname{supp} f \cdot \psi_\lambda \subset \operatorname{supp} \psi_\lambda \cap \operatorname{supp} f$$

となることに注意すると、

$f \cdot \psi_\lambda \in C_c(\Omega)$ は性質 ⑦ を満たす (∵ PUS の $\{U \mid (U,\pi) \in S^{\mathrm{comm}}_{\Omega}\}$ の性質)

ことが分かる。

<u>Def 10.9</u>: $\Lambda(f) := \{\lambda \in \Lambda \mid \operatorname{supp} \psi_\lambda \cap \operatorname{supp} f = \emptyset\}$ とおく。

<u>Prop 10.10</u>: $\Lambda(f)$ は有限集合。

また $\lambda \notin \Lambda(f)$ のとき、 $\displaystyle\int_{(\Omega,\sigma)} f \cdot \psi_\lambda \, \omega = 0$

Prop 10.10 の証明：後半の主張は $\lambda \notin \Lambda(f)$ なら $f \cdot \psi_\lambda \equiv 0$ $(\mathrm{on}\ \Omega)$ より従う.

前半の主張を示そう：

$\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は 1 の分割なので $\{\mathrm{supp}\,\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は locally finite.

特に各 $p \in \mathrm{supp} f$ について O_p：p の開近傍であって

$\Lambda(O_p) := \{\lambda \in \Lambda \mid \mathrm{supp}\,\psi_\lambda \cap O_p \neq \emptyset\}$ が有限となるものがとれる.

各 $p \in \mathrm{supp} f$ について，このような O_p を選んで固定する.

このとき $\{O_p\}_{p \in \mathrm{supp} f}$ は $\mathrm{supp} f$ の open cover となる.

いま $\operatorname{supp} f$ は compact なので $p_1 \cdots p_N \in \operatorname{supp} f$ をうまく選ぶと

$$\bigcup_{i=1}^{N} O_{p_i} \supset \operatorname{supp} f$$ となる.

このとき $\Lambda(f) \subset \bigcup_{i=1}^{N} \underbrace{\Lambda(O_{p_i})}_{\text{有限}}$ であるから $\Lambda(f)$ は有限

$\blacksquare$

Def 10.11 :

性質(*)を満たす

$$\int_{(\Omega,\sigma)} f\omega := \sum_{\lambda \in \Lambda(f)} \int_{(\Omega,\sigma)} (f \cdot \psi_\lambda)\omega \in \mathbb{R}$$

と定める.

有限和

Theorem 10.13

$$\begin{aligned} C_c(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_{(\Omega,\sigma)} f\omega \end{aligned}$$

は well-defined で線型汎関数となる.

Theorem 10.13 の証明:

線型性は C_K 上の積分の線型性 (Prop 10.4) から従う.

Well-defined であることを示すには以下を示せばよい.

Lemma 10.14 $f \in C_c(\Omega)$ を固定する.

このとき

$$\int_{(\Omega,\sigma)} f\omega \in \mathbb{R}$$ は $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の選び方に依らない.

Lemma 10.14 の証明：

$\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{\phi_\gamma\}_{\gamma\in P}$ を夫に PUS to $\{U \mid (U,x)\in S_\Omega^{\mathrm{conn}}\}$ とする.

示 $$\sum_{\lambda\in\Lambda(f)}\int_{(\Omega,\sigma)}(f\cdot\psi_\lambda)\,\omega = \sum_{\gamma\in P(f)}\int_{(\Omega,\sigma)}(f\cdot\phi_\gamma)\,\omega$$

まず $\{\psi_\lambda\cdot\phi_\gamma\}_{(\lambda,\gamma)\in\Lambda\times P}$ が PUS to $\{U \mid (U,x)\in S_\Omega^{\mathrm{conn}}\}$

となることに注意しておく.

特に $(\Lambda\times P)(f) := \{(\lambda,\gamma)\in\Lambda\times P \mid \mathrm{supp}(\psi_\lambda\cdot\phi_\gamma)\cap \mathrm{supp} f \neq \emptyset\}$

は有限で.

$$\sum_{(\Lambda\times P)(f)} \int_{(\Omega,\sigma)} f\cdot(\psi_\lambda\cdot\phi_\gamma)\,\omega \in \mathbb{R}$$ は well-defined.

従って以下を示せば十分.

示1 $$\sum_{(\Lambda\times P)(f)} \int_{(\Omega,\sigma)} f\cdot(\psi_\lambda\cdot\phi_\gamma)\,\omega = \sum_{\lambda\in\Lambda(f)} \int_{(\Omega,\sigma)} (f\cdot\psi_\lambda)\,\omega$$

示2 $$\sum_{(\Lambda\times P)(f)} \int_{(\Omega,\sigma)} f\cdot(\psi_\lambda\cdot\phi_\gamma)\,\omega = \sum_{\gamma\in P(f)} \int_{(\Omega,\sigma)} (f\cdot\phi_\gamma)\,\omega$$

示1 について

まず $(\Lambda \times \Gamma)(f) \subset \underbrace{\Lambda(f)}_{\text{有限}} \times \underbrace{\Gamma(f)}_{\text{有限}}$ に注意しておく.

また $(\lambda, \gamma) \notin (\Lambda \times \Gamma)(f)$ のとき $\displaystyle\int_{(\Omega,\sigma)} f \cdot (\psi_\lambda \cdot \phi_\gamma)\,\omega = 0$

となる (Prop 10.10) ので

$$\sum_{(\Lambda\times\Gamma)(f)} \int_{(\Omega,\sigma)} f \cdot (\psi_\lambda \cdot \phi_\gamma)\,\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(f)} \sum_{\gamma \in \Gamma(f)} \int_{(\Omega,\sigma)} f \cdot (\psi_\lambda \cdot \phi_\gamma)\,\omega$$

を得る.

ここで1の分割の定義から

$$f \cdot \sum_{\gamma \in \Lambda(f)} \phi_\gamma \equiv f \quad \text{on } \Omega$$

となることに注意すると、

$$\sum_{\lambda \in \Lambda(f)} \sum_{\gamma \in \Gamma(f)} \int_{(\Omega,\sigma)} f \cdot (\psi_\lambda \cdot \phi_\gamma)\, \omega$$

$$= \sum_{\lambda \in \Lambda(f)} \int_{(\Omega,\sigma)} f \cdot \psi_\lambda \cdot \Big(\sum_{\gamma \in \Gamma(f)} \phi_\gamma\Big)\, \omega$$

$$= \sum_{\lambda \in \Lambda(f)} \int_{(\Omega,\sigma)} f \cdot \psi_\lambda\, \omega.$$

これで示1が示された。

示2も同様に示される。 ∎

Remark: (Ω, σ), ω を fix したとき

$$C_c(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_{(\Omega,\sigma)} f\omega$$

は positive になるとは限らない.

"$f(p) \geq 0$ ($\forall p \in \Omega$)
$\Rightarrow \int_{(\Omega,\sigma)} f\omega \geq 0$"

(Section 12 でこの問題を扱う予定)