前回 §10 多様体上のリーマン積分
(第8回)

今回 §11 体積形式, 密度形式

§11 : 体積形式, 密度形式

Ω : k-dim'l C^∞-mfd with corners

σ : Ω 上の向き

ω : C^∞-級 k-form on Ω

§10で $C_c(\Omega) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_{(\Omega,\sigma)} f\omega$ を定義した.

問題点, (a) : $f \geq 0$ (i.e. $\forall p \in \Omega$, $f(x) \geq 0$) であっても $\int_{(\Omega,\sigma)} f\omega \geq 0$ となるとは限らない.

(b) : Ω で向き付け不可能なとき

σ がとれないので積分が定義できない.

(c) ルベーグ積分との関係は?

(a) : "ω が体積形式で σ が ω と compatible"

なら $f \geq 0 \Rightarrow \int_{(\Omega,\sigma)} f\omega \geq 0$

(b) : "k-次微分形式と同定"

ξ -一般化

密度 (density)

- 密度は同定付け不可能な場合でも存在する.
- "密度による関数の積分" が定義できる.

(c) 体積形式, 密度による積分はある測度についてのルベーグ積分とみなせる.

内容：

- 体積形式とそれに compatible な向きの定義
- 体積形式とそれに compatible な向きによる積分は positive
- 密度形式の定義と積分
- 密度形式の存在定理
- ラドン測度による積分との関係

§11.1 体積形式

Ω : k-dim'l C^∞-mfd w.c.

Def 11.1 $\omega \in \Lambda^k(\Omega)$ が Ω 上の体積形式 (volume form)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\omega_p \neq 0$ as in $\underbrace{\Lambda^k T_p^\vee \Omega}_{1\text{次元}}$ ($\forall p \in \Omega$)

Theorem 11.2 Ω について以下は同値

(i) 体積形式が存在する.

$\Updownarrow$

(ii) Ω は向き付け可能

$\Updownarrow$

(cf. Thm 9.7) (iii) 1次元ベクトル束 $\Lambda^k T^\vee \Omega$ の枠束 (frame bundle) が自明

以下，ω を Ω 上の体積形式とする．

Def 11.3：Ω 上の向き σ が ω と compatible

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall (U, x) \in S_\Omega^{\mathrm{conn}}$

$\underbrace{\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)}_{\substack{U\text{上の連続関数} \\ \text{で零点を持たない}}}$ の符号 $= \sigma(U, x)$

Theorem 11.4：体積形式 ω を固定したとき，

ω と compatible な Ω 上の向きはただ1つ存在する．

（Hint：Def 11.3 の等式を "σ の定義" と思えばよい）

Theorem 11.5 :

ω : 体積形式 on Ω

σ : ω と compatible な Ω 上の向き

とする.

このとき

$$\begin{aligned} C_c(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_{(\Omega,\sigma)} f\omega \end{aligned}$$

は positive.

∵ $f \in C_c(\Omega)$ が positive, $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が PUS to $\{U \mid (U,x) \in S_\Omega^{\mathrm{compa}}\}$

のとき $f\cdot\psi_\lambda \in C_c(\Omega)$ も positive である.

積分の定義から $\int_{(\Omega,\sigma)} f\cdot\psi_\lambda\,\omega \geq 0$ を示せば十分.

特に以下のLemmaを示せば十分である.

Lemma 11.6: $f \in C_c(\Omega)$ が positive なら

性質 ⑧ "$\exists (U, x) \in S_\Omega^{conn}$ s.t. $\mathrm{supp} f \subset U$"

のとき $\int_{(\Omega, o)} f\omega \geq 0$.

Lemma 11.6 の証明: $(U, x) \in S_\Omega^{conn}$ で $\mathrm{supp} f \subset U$ となるものをとる.

このとき $\int_{(\Omega, o)} f\omega := \sigma(U, x) I_{C_k}((f \cdot \xi_U) \circ x^{-1})$

ただし $\omega|_U = \xi_U \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ として $(\exists! \xi_U \in C^\infty(U))$

ここで $\xi_U \equiv \overbrace{\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)}^{U\text{上の関数}}$ に注意すると

U上のベクトル場

σ が ω と compatible であることから

$$\sigma(U, x)\,\xi_U \equiv \left|\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right| \quad \text{とする}$$

特に

$$\int_{(\Omega,\sigma)} f\omega = \underbrace{L_{C_k}\Big(\underbrace{(f\circ x^{-1})}_{\text{positive}}\cdot\big(\underbrace{\left|\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right|\circ x^{-1}}_{\text{positive}}\big)\Big)}_{\text{positive}} \geq 0$$

$L_{C_k} : C_c(C_k) \to \mathbb{R}$ は positive

∎

§11.2 密度

ゴール：向き付け不可能な多様体上でもリーマン積分したい。

"密度形式(density form)"という概念を用いれば リーマン積分が定義できる!

Def 11.7 V : k-dim'l vector sp / $\mathbb{R}$

写像 $\mu : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$ が V の密度(density)

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall v_1 \cdots \forall v_k \in V$, $\forall A \in GL(V)$

$$\mu(Av_1, \cdots, Av_k) = |\det A| \, \mu(v_1 \cdots v_k)$$

(ただし $k=0$ のときは "$\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a|x|$ ($a \in \mathbb{R}$)" を V 上の density とする)

μ : V 上の density とする.

Observation :

- $\{v_1, \cdots, v_k\}$ が一次従属 $\Rightarrow \mu(v_1 \cdots v_k) = 0$

<u>Def 11.8</u> : V 上の density μ が正定値 (positive)

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \mu \underset{\text{かつ}}{\neq} 0$$

$$\exists \{e_1 \cdots e_k\} : V \text{ の基底}$$

$$\text{s.t. } \mu(e_1 \cdots e_k) > 0$$

V : k-dim'l vector space$/\mathbb{R}$ とし

$\mathrm{Vol}(V) := \{ V$ 上の density $\}$ とおく.

Prop 11.9 $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_k\}$: V の基底 について

$\mathcal{B}^\vee = \{w_1 \cdots w_k\}$ を $\mathcal{B}$ の双対基底とする.

このとき $|w_1 \wedge \cdots \wedge w_k| : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$

$$(v_1, \cdots, v_k) \mapsto |(w_1 \wedge \cdots \wedge w_k)(v_1 \cdots v_k)|$$

$$= \left(\left| \det \left(w_i(v_j) \right)_{ij} \right| \right)$$

とすると, $|w_1 \wedge \cdots \wedge w_k|$ は V 上の positive な density

Prop 11.10 : $\mathrm{Vol}(V)$ は 1次元ベクトル空間

以下，Ω : k-dim'l C^∞-mfd w.c とする．

（向き付け不可能でもよい）

$$\mathcal{V}(\Omega) := \bigsqcup_{p \in \Omega} \mathrm{Vol}(T_p\Omega)$$ とおく（統一記号）

<u>Def 11.11</u> 写像 $\mu : \Omega \to \mathcal{V}(\Omega)$ が

$p \mapsto \mu_p$

Ω上の密度形式（density form）

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mu_p \in \mathrm{Vol}(T_p\Omega)$ $(\forall p \in \Omega)$

μ : Ω 上の密度形式 とする.

Def 11.12 μ が positive $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall p \in \Omega$, μ_p : $T_p\Omega$ 上の density が positive

Def 11.13 μ が C^∞-級

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall (U, x) \in S_\Omega$,

$$\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_k}\right) : U \to \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \mu_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\right)$$

が C^∞-級

($\Leftrightarrow$ $\mu|_U \equiv \xi_U \, |dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k|$ ($\exists \xi_U \in C^\infty(U)$) と書いたとき ξ_U は C^∞-級)

μ : Ω 上の density form とする.

μ による $f \in C_c(\Omega)$ の積分を以下で定義する.

Def 11.14 $f \in C_c(\Omega)$ について

$$\int_\Omega f\mu := \sum_{\lambda \in \Lambda} I_{C_k}((f \cdot \psi_\lambda \cdot \xi_{U_\lambda}) \circ x_\lambda^{-1}) \in \mathbb{R}$$

Σ は有限和

とおく.

ただし $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を PUS to $\{U \mid (U, x) \in S_\Omega^{conn}\}$ とし,

各 λ について $(U_\lambda, x_\lambda) \in S_\Omega^{conn}$ s.t. $\operatorname{supp} \psi_\lambda \subset U_\lambda$ を fix し,

$\xi_{U_\lambda} \in C^\infty(U_\lambda)$ は $\mu|_{U_\lambda} \equiv \xi_{U_\lambda} \cdot |dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k|$ となるものとする.

(特に $\xi_{U_\lambda} \equiv \mu\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)$)

Theorem 11.15 : Ω 上の density form μ を fix したとき

$$C_c(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_\Omega f\mu$$

は well-defined で線型汎関数となる.

Hint : $(U, x), (V, y) \in S_\Omega^{\mathrm{conn}}$ with $U \cap V \neq \emptyset$ について

$$\xi_U(p) = \xi_V(p) \cdot \left|\det J_{x(p)}(y \circ x^{-1})\right| \quad (\forall p \in U \cap V)$$

(Lemma 10.8 の類似) となる事を用いる.

Theorem 11.16 : μ が positive なら

$$C_c(\Omega) \to \mathbb{R}, \ f \mapsto \int_\Omega f\mu \text{ は positive}$$

Prop 11.17 : Ω が向き付け可能であるとし，
ω : 体積形式 とする．

(1) このとき 各 $p \in \Omega$ について

$$\mu_p : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R},\ (v_1, \cdots, v_k) \mapsto |\omega(v_1 \cdots v_k)|$$

とおくと $\mu : \Omega \to \mathcal{V}(\Omega)$ は C^∞-級 positive density form on Ω

(2) σ を ω と compatible な Ω 上の向きとする．

このとき 各 $f \in C_c(\Omega)$ について

$$\int_{(\Omega,\sigma)} f\omega = \int_\Omega f\mu$$

Theorem 11.18: Ω が向き付け不可能であっても

C^∞-級の positive density form は存在する.

(Hint: 局所座標上で構成しておいて,

1の分割を用いて全体で貼り合わせる.)

Theorem 11.19: g を Ω 上のリーマン計量とする.

各 $p \in \Omega$ について, $(U, x) \in S_\Omega$ with $p \in U$ を固定し

$$\mu_p := \underbrace{\sqrt{\det g\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)_{i,j}}}_{\text{正の値}} \left|(dx_1)_p \wedge \cdots \wedge (dx_k)_p\right| \in \mathrm{Vol}(T_p\Omega)$$

とおく.

このとき μ_p は (U, x) の取り方に依らない.

また $\mu : \Omega \to \mathcal{V}(\Omega)$, $p \mapsto \mu_p$ は C^∞-級 positive density form

§ 11.3 : ラドン測度

一般論の準備 : $X = (X, \mathcal{O}_X)$: 局所コンパクト Hausdorff 位相空間.

$\mathcal{F}(\mathcal{O}_X)$: $\mathcal{O}_X$ の生成する X 上の可測集合族とする.

<u>Def 11.20</u> 可測空間 $(X, \mathcal{F}(\mathcal{O}_X))$ 上の測度 $\nu : \mathcal{F}(\mathcal{O}_X) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ が局所有限ラドン測度

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $\forall A \subset X$: compact, $\nu(A) < \infty$

かつ

(ii) $\forall E \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_X)$, $\nu(E) = \inf\left\{ \nu(U) \;\middle|\; \begin{array}{l} U \text{ は open} \\ E \subset U \end{array} \right\}$.

かつ

(iii) $\forall U \subset X$: open, $\nu(U) = \sup\left\{ \nu(A) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \text{ は compact} \\ A \subset U \end{array} \right\}$

かつ

(iv) $\forall x \in X$ s.t. $\exists V_x$: x の近傍 s.t. $V_x \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_X)$ かつ $\nu(V_x) < \infty$

ν を X 上のラドン測度とする.

Theorem 11.21 各 $f \in C_c(X) := \left\{ \begin{array}{l} \text{continuous functions on } X \\ \text{with compact supports} \end{array} \right\}$ について f は ν に関して L^1 可積分.

$$I_\nu : C_c(X) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto f \text{ の } \nu \text{ によるルベーグ積分}$$

とすると, I_ν は positive な線型汎関数となる.

($C_c(X)$ に $\bigcup_{K:\text{cpt}} \underbrace{C_K(X)}_{\text{sup norm で完備}}$ として定まる位相を定めると連続になる
ここでは詳細は略す)

Ω : k-dim'l C^∞-mfd w.c

μ : C^∞-級 positive density form とする.

<u>Theorem 11.22</u> : $\exists! \nu$: 局所有限ラドン測度 on Ω

s.t. $\forall f \in C_c(X)$, $I_\nu(f) = \int_\Omega f\mu$

Hint : ラドン測度についての表現定理を用いる.

Theorem 11.21 （ラドン測度の表現定理）

(1) ν : X 上のラドン測度とする.

このとき $I_\nu : C_c(X) \to \mathbb{R}$ は