幾何学D・多様幾何基礎Bレポート問題集 No.1

担当: 奥田隆幸

成績について

- 幾何学D・多様幾何基礎Bの成績評価は, レポートによって行います.
- レポートは全3回の予定です. このレポート問題集は第1回のものです. 第2回問題集は1月中旬にお知らせします.
- 「全てのレポートにおいて２０点以上獲得する」ことを単位取得の必要十分条件とします. それ以上の成績についてはレポートの成績に対応する形で判定します.
- 各回のレポート問題集の中から, 自分で問題をいくつか選んで解いて, 「清書した上で」提出してください.
- 第1回のレポート締め切りは1月10日 (木) とします. 10日 (木) の講義後に提出するか, 数学事務室入口右手のボックスに提出してください (金曜にボックスから回収します).
- 事情があって提出締め切りに間に合わない場合は, 1月9日 (水) までに

  奥田隆幸 okudatak@hiroshima-u.ac.jp

  まで連絡ください.
- 表紙は必ずしもつけなくて構いませんが, 学籍番号と名前が一目で分かるようにしてから提出してください.
- 問題を解く際には他の問題の結果などは適宜用いてよいことにします. その際にはそのことが分かるように宣言してください.

- 以下に挙げる問題とは別に, レポート内で独自の問題を設定して解いてもよいこととします. その場合の得点については採点時に適切に配点を行います.

1 ベクトル空間上の交代形式

以下, V を m-次元実ベクトル空間とする.

問題 1.1 (5 点)

V の双対空間 $V^\vee$ の定義を述べよ.

問題 1.2 (10 点)

V の双対空間 $V^\vee$ が実ベクトル空間の構造を定めよ. すなわち和とスカラー倍を定義し, ベクトル空間の公理を満たすことを示せ.

問題 1.3 (10 点)

$\mathcal{B} := \{e_1, \ldots, e_m\}$ を V の基底とする. 双対基底 $\mathcal{B}^\vee = \{w_1, \ldots, w_m\} \subset V^\vee$ の定義を述べよ. また $\mathcal{B}^\vee$ が $V^\vee$ の基底をなしていることを示せ.

問題 1.4 (5 点)

この問題では V を二次元実ベクトル空間とする. $\mathcal{B} := \{e_1, e_2\}$ を V の基底とし, $\mathcal{B}^\vee = \{w_1, w_2\}$ を $\mathcal{B}$ の双対基底とする. このとき写像

$$\omega_{\mathcal{B}} : V \times V \to \mathbb{R}, (v_1, v_2) \mapsto \det \begin{pmatrix} w_1(v_1) & w_2(v_1) \\ w_1(v_2) & w_2(v_2) \end{pmatrix}$$

は V 上の二次交代形式であることを確認せよ.

問題 1.5 (20 点)

$k > m$ とする. 写像

$$\omega : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$$

が多重線形かつ交代的であるなら, ω はゼロ写像でなければならないことを示せ.

問題 1.6 (10 点)

$m \geq 4$ とする. ω, η を共に V 上の 2 次交代形式とする. このとき,

$$\omega \wedge \eta : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$$

を, 各 $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ について

$$(\omega \ \wedge \ \eta)(v_1, v_2, v_3, v_4) \quad := \quad \frac{1}{4} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \mathrm{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}) \eta(v_{\sigma(3)}, v_{\sigma(4)})$$

として定める. このとき $\omega \wedge \eta$ が V 上の 4 次交代形式であることを示せ.

問題 1.7 (5 点)

上の問題の設定において,

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \eta)(v_1, v_2, v_3, v_4) = {} & \omega(v_1, v_2)\eta(v_3, v_4) + (-1)\omega(v_1, v_3)\eta(v_2, v_4) \\ & + \omega(v_1, v_4)\eta(v_2, v_3) + \omega(v_2, v_3)\eta(v_1, v_4) \\ & + (-1)\omega(v_2, v_4)\eta(v_1, v_3) + \omega(v_3, v_4)\eta(v_1, v_2)\end{aligned}$$

となることを確認せよ.

問題 1.8 (20 点)

交代形式の外積が associative であることを示せ.

問題 1.9 (5 点)

V 上の k-次交代形式全体のなす集合 $\bigwedge^k V^\vee$ に実ベクトル空間の構造を定めよ. すなわち和とスカラー倍を定義し, ベクトル空間の公理を満たすことを示せ (簡単のため, $k \geq 1$ としてよい).

問題 1.10 (20 点)

$\mathcal{B} := \{e_1, \ldots, e_m\}$ を V の基底とし, $\mathcal{B}^\vee = \{w_1, \ldots, w_m\}$ を $\mathcal{B}$ の双対基底とする. このとき,

$$\{w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge w_{i_3} \cdots \wedge w_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m\}$$

が $\bigwedge^k V^\vee$ の基底であることを示せ.

2 微分形式

以下, $M = (M, \mathcal{S}_M)$ を m-次元 C^∞-級多様体とする. また $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ を固定する.

問題 2.1 (5 点)

M 上の k-次微分形式 (k-form) の定義を述べよ.

問題 2.2 (10 点)

M 上の k-次微分形式 ω が C^∞-級であることの定義を述べよ.

問題 2.3 (20 点)

M 上の k-次微分形式 ω について, ω が C^∞-級であることは「ω が各点 $p \in M$ の周りで C^∞-級」であることと同値であることを示せ.

問題 2.4 (5 点)

$f \in C^\infty(M)$ とする. 各 $p \in M$ について,

$$df_p : T_pM \to \mathbb{R},\ v \mapsto v(f)$$

と定める. このとき $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$ が線形汎函数であることを示せ.

問題 2.5 (5 点)

$f \in C^\infty(M)$ とする.

$$df : M \to T^\vee M,\ p \mapsto df_p$$

が M 上の 1-次微分形式として C^∞-級であることを示せ.

問題 2.6 (20 点)

$\mathbb{R}$ 上の任意の C^∞-級 1-次微分形式 ω について, ある $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ であって, $\omega = df$ となるものが存在することを示せ (Hint: 微積分の基本定理を用いてよい).

問題 2.7 (50 点)

S^1 上の C^∞-級 1-次微分形式 ω であって, どんな $f \in C^\infty(S^1)$ についても $\omega = df$ とはならないようなものを構成せよ.

問題 2.8 (30 点)

S^2 上の 2-次微分形式 ω_{Haar} (講義中に紹介したもの) が C^∞-級であることを示せ (問題 2.3 の結果を用いてもよい).

問題 2.9 (20 点)

M 上の k-次微分形式 ω について, 以下の二条件が同値であることを示せ (簡単のため $k \geq 1$ としてよい).

条件 (i): ω は C^∞-級.

条件 (ii): 任意の $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ について, 関数

$$\omega(X_1, \ldots, X_k) : M \to \mathbb{R},\ p \mapsto \omega_p((X_1)_p, \ldots, ((X_k)_p))$$

が C^∞-級.

問題 2.10 (10 点)

M 上の C^∞-級 k-次微分形式全体のなす空間 $\Lambda^k(M)$ に, 実ベクトル空間の構造を定めよ.

問題 2.11 (10 点)

$\omega \in \Lambda^k(M)$ と $f \in C^\infty(M)$ について,

$$f\omega : M \to \bigwedge^k T^\vee M,\ p \mapsto f(p)\omega_p$$

と定める. このとき $f\omega$ が C^∞-級となることを示せ.

問題 2.12 (10 点)

上記の "関数倍" の構造により, $\Lambda^k(M)$ は $C^\infty(M)$-加群となることを確認せよ.

問題 2.13 (10 点)

k, l を $k + l \leq m$ となる非負整数とする. ω を M 上の k-次微分形式, η を M 上の l-次微分形式とする. ω, η が共に C^∞-級のとき, $\omega \wedge \eta$ も C^∞-級であることを示せ. (Hint: 問題 2.9 を用いてよい).