幾何学D・多様幾何基礎Bレポート問題集 No.2

担当: 奥田隆幸

成績について

- 幾何学D・多様幾何基礎Bの成績評価は, レポートによって行います.
- レポートは全3回の予定です. このレポート問題集は第2回のものです. 第3回問題集は2月最初の週にお知らせします.
- 「全てのレポートにおいて２０点以上獲得する」ことを単位取得の必要十分条件とします. それ以上の成績についてはレポートの成績に対応する形で判定します.
- 各回のレポート問題集の中から, 自分で問題をいくつか選んで解いて, 「清書した上で」提出してください.
- 第2回のレポート締め切りは2月7日 (木) とします. 2月7日 (木) の講義後に提出するか, 数学事務室入口右手のボックスに提出してください (金曜にボックスから回収します).
- 事情があって提出締め切りに間に合わない場合は, 2月6日 (水) までに

  奥田隆幸 okudatak@hiroshima-u.ac.jp

  まで連絡ください.
- 表紙は必ずしもつけなくて構いませんが, 学籍番号と名前が一目で分かるようにしてから提出してください.
- 問題を解く際には他の問題の結果などは適宜用いてよいことにします. その際にはそのことが分かるように宣言してください.

- 以下に挙げる問題とは別に, レポート内で独自の問題を設定して解いてもよいこととします. その場合の得点については採点時に適切に配点を行います.

1 多様体上のリーマン積分

問題 1.1 (10 点)

M を通常の意味の m-次元 C^∞-級多様体とする. このとき M は C_m-atlas を持つことを示せ. (特に M は角付き m-次元 C^∞-級多様体とみなせる).

問題 1.2 (10 点)

X を位相空間とし, X の部分集合族 $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は局所有限であるとする (cf. 第 7 回 Definition 8.1). S を X のコンパクト部分集合とすると,

$$\Lambda(S) := \{\lambda \in \Lambda \mid S \cap C_\lambda \neq \emptyset\}$$

は有限集合になることを示せ.

問題 1.3 (20 点)

メビウスの帯が向き付け不可能であることを示せ. (メビウスの帯の定義は図などで説明してもよい)

問題 1.4 (20 点)

2 次元球面に向きを一つ定めよ. (講義では “角付き多様体” に対する向きの定義を行ったが, 通常の意味の多様体についても同様に定義してよい).

問題 1.5 (40 点)

Theorem 9.5 (第 7 回) を示せ.

問題 1.6 (10 点)

Lemma 10.8 (第 8 回) を示せ.

問題 1.7 (30 点)

向き付けられた k-次元角付き C^∞-級多様体 (Ω, σ) 上に C^∞-級 k-form ω が定まっているとする．このとき連続関数 f のリーマン積分

$$\int_{(\Omega,\sigma)} f\omega \in \mathbb{R}$$

の定義を三段階に分けて述べよ．(ここでは well-definedness については議論しなくてもよい).

問題 1.9 (20 点)

$\Omega := [0,1]$ とおく．Ω 上の C_1-atlas を一つ構成せよ．また, Ω 上の向きを一つ定めよ．さらに, 構成した C_1-atlas の座標近傍たちに (弱い意味で) 従う 1 の分割を一つ構成せよ．(1 の分割の各関数たちは連続である必要はあるが, ここでは C^∞-級でなくてもよいこととする).

問題 1.10 (10 点)

問題 1.9 で定義された 1-次元角付き多様体 Ω について, Ω 上の体積形式 ω を一つ構成せよ.

問題 1.11 (30 点)

(Ω, σ) を問題 1.9 で考えた向き付けられた 1 次元角付き多様体とし, ω を問題 1.10 で構成した体積形式とする．また, 関数 $f : \Omega = [0,1] \to \mathbb{R}$ を $f(p) = p$ (for each $p \in [0,1]$) として定める．この関数について積分

$$\int_{(\Omega,\sigma)} f\omega \in \mathbb{R}$$

を定義に従って求めよ.

2　ストークスの定理

問題 2.1 (10 点)

C^∞-級多様体上の C^∞-級微分形式の外微分の定義を述べよ．(ここでは well-definedness を論じなくてもよいことにする)

問題 2.2 (10 点)

$\mathbb{R}^2$ 上の 1-form ω を

$$\omega = ydx + xdy$$

として定める．ただし x, y は $\mathbb{R}^2$ の自然な座標関数とする．このとき ω の外微分 $d\omega$ を求めよ．(Hint: 第 5 回の Observation に書かれている事実を用いてよい).

問題 2.3 (40 点)

M, N を C^∞-級多様体 (通常の意味でもよいし, 角付きの意味でもよい) とし, $f : M \to N$ を C^∞-級写像, ω を N 上の C^∞-級 k-form とする．このとき, f による ω の引き戻し $f^*\omega$ を定義し, これが M 上の C^∞-級微分形式となることを確認せよ.

問題 2.4 (30 点)

$\Omega = [0, 1]$ の場合に, 境界多様体を具体的に構成し, それが Definition 12.7 (第１０回) の条件を満たすことを確認せよ.

問題 2.5 (50 点)

ストークスの定理は境界多様体の選び方に依らないことを示せ．つまり, Ω を k-次元角付き C^∞-級多様体 ($k \geq 1$), σ を Ω 上の向き, η を Ω 上の C^∞-級 $(k-1)$-form とする．また, (Υ_1, ι_1), (Υ_2, ι_2) を共に Ω の境界多様体 (cf. 第１０回 Definition 12.7) であるとし, σ_1, σ_2 をそれぞれ σ が誘導する Υ_1, Υ_2 上の向きとする．このとき,

$$\int_{(\Upsilon_1, \sigma_1)} \iota_1^*(\eta) = \int_{(\Upsilon_2, \sigma_2)} \iota_2^*(\eta)$$

を示せ (Hint: Theorem 12.8 (2) を用いてよい).

問題 2.6 (50 点)

Proposition 12.10 (第１０回) を示せ.

問題 2.7 (30 点)

$\Omega = [0, 1]$ の場合に, ストークスの定理の主張を述べ, 証明せよ.