幾何学D・多様幾何基礎Bレポート問題集 No.3

担当: 奥田隆幸

成績について

- 幾何学D・多様幾何基礎Bの成績評価は, レポートによって行います.
- レポートは全3回です. このレポート問題集は第3回のものです.
- 「全てのレポートにおいて２０点以上獲得する」ことを単位取得の必要十分条件とします. それ以上の成績についてはレポートの成績に対応する形で判定します.
- 各回のレポート問題集の中から, 自分で問題をいくつか選んで解いて, 「清書した上で」提出してください.
- 第3回のレポート締め切りは2月14日(木) とします. 数学事務室入口右手のボックスに提出してください (金曜にボックスから回収します).
- 事情があって提出締め切りに間に合わない場合は, 2月13日(水) までに

  奥田隆幸 okudatak@hiroshima-u.ac.jp

  まで連絡ください.
- 表紙は必ずしもつけなくて構いませんが, 学籍番号と名前が一目で分かるようにしてから提出してください.
- 問題を解く際には他の問題の結果などは適宜用いてよいことにします. その際にはそのことが分かるように宣言してください.
- 以下に挙げる問題とは別に, レポート内で独自の問題を設定して解いてもよいこととします. その場合の得点については採点時に適切に配点を行います.

1　特異ホモロジー

問題 1.1 (20 点)

講義ノート Theorem 13.7 を示せ.

問題 1.2 (10 点)

講義ノート Lemma 14.9 を示せ.

問題 1.3 (40 点)

一点集合 X を位相空間とみなす. X の $\mathbb{R}$-係数特異ホモロジーを決定せよ (鎖複体が高次でも自明ではないことに注意せよ).

問題 1.4 (60 点)

位相空間の特異ホモロジーがホモトピー不変量であることを示せ.

問題 1.5 (10 点)

$\mathbb{R}$ が一点集合と C^∞-homotopic であることを示せ.

2　ド・ラームコホモロジー

問題 2.1 (30 点)

“余鎖複体” および “余鎖複体のコホモロジー” を定義せよ.

問題 2.2 (40 点)

講義ノート Proposition 15.11 を示せ.

問題 2.3 (40 点)

講義ノート Lemma 15.12 を示せ.

問題 2.4 (50 点)

二次元球面 S^2 のド・ラームコホモロジーを決定せよ (Hint: Mayer–Vietris 完全系列の理論を用いてよい).

問題 2.5 (40 点)

講義ノート Lemma 15.17 を示せ.

問題 2.6 (40 点)

講義ノート Lemma 15.19 を示せ.

問題 2.7 (60 点)

講義ノート Theorem 16.1 を示せ.

問題 2.8 (20 点)

M を向き付け可能な m-次元閉多様体とし, σ を M の向きとする. このとき, 線型写像

$$H^m_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathbb{R},\ [\omega] \mapsto \int_{(M,\sigma)} \omega$$

が well-defined であること, すなわち $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^m(M)$ が $\omega_1 - \omega_2 \in \mathrm{Image}\ d_{m-1}$ を満たすとき,

$$\int_{(M,\sigma)} \omega_1 = \int_{(M,\sigma)} \omega_2$$

となることを示せ (これは講義ノート Theorem 16.4 の証明の一部となる).

問題 2.9 (10 点)

講義ノート Example 17.7 の主張を示せ.

問題 2.10 (30 点)

講義ノート Proposition 17.12 を示せ.

問題 2.11 (30 点)

講義ノート Proposition 17.17 を示せ.

問題 2.12 (30 点)

$\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ を Lie 代数とし, $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ を $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ の Lie 代数としての直和とする. すなわち $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ はベクトル空間として $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ の直和であり, ブラケット積は

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] := ([X_1, X_2], [Y_1, Y_2]) \quad (X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1,\ Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}_2)$$

として定めるものとする. このとき各 $k \in \mathbb{Z}$ について,

$$H^k(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 : \mathbb{R}) = \bigoplus_{l+s=k} (H^l(\mathfrak{g}_1 : \mathbb{R}) \otimes H^s(\mathfrak{g}_2 : \mathbb{R}))$$

となることを示せ.

問題 2.13 (50 点)

連結コンパクト Lie 群 $SO(4)$ のド・ラームコホモロジーを決定せよ (Hint: $\mathrm{Lie}\, SO(4) = \mathrm{Lie}\, SO(3) \oplus \mathrm{Lie}\, SO(3)$ を示せ).