数学概論 第1回

2018 6/18

第一回内容と計画 (90/分)

テーマ：群作用と不変測度

(1) 群作用の定義と例

- 集合 X の対称群 $\mathfrak{S}(X)$
- 群作用 $\leftrightarrow$ $\rho : G \to \mathfrak{S}(X)$ 群準同型
- 例

(2) 軌道と固定点

- G 不変部分集合
- 軌道は G-不変部分集合
- (G, ρ)-固定点

(3) 可測空間への可測作用

- 可測空間 $(X, \mathcal{F})$ の Def
- 可測変換群 $\mathfrak{S}(X, \mathcal{F})$
- 可測作用 $\rho : G \to \mathfrak{S}(X, \mathcal{F})$

(4) G-不変測度

- 可測空間上の測度
- $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}) := \{ (X, \mathcal{F})$ 上の測度 $\}$
- 可測作用 $\rho : G \to \mathfrak{S}(X, \mathcal{F})$ は

  $\tilde{\rho} : G \to \mathfrak{S}(\mathcal{M}(X, \mathcal{F}))$ を induce する
- G-不変測度 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\tilde{\rho}$-固定点

講義題目：位相群の作用と測度（計3回）

ゴール：局所コンパクト群のイソトロピーコンパクト等質空間には自然な位相と測度が定まる！

例	局所コンパクト群	等質空間
	$(\mathbb{R}^n, +)$	$\mathbb{R}^n$
	$O(n)$ (直交群)	S^{n-1} (球面)
	$O(n,1)$ (不定値直交群)	$\mathbb{H}^n$ (双曲空間)
	$(\mathbb{Q}_p^n, +)$ (p進数の加法群)	$\mathbb{Q}_p^n$

第1回（6/18）：群作用と不変測度

第2回（6/22）：位相群の等質空間

第3回（6/25）：不変Radon測度

レポート：講義中の"問"を3つ以上

今日やる事

(1) 群作用とその軌道，固定点，を定義．

(2) 可測空間への群の可測作用を定義．

(3) 可測な作用は測度全体のなす集合への作用を誘導する．

(4) $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ測度は群 $(\mathbb{R}^n, +)$ による平行移動作用で不変

§1. 群作用

この講義を通じて、各集合 X について

$$\mathfrak{S}(X) := \{ f : X \to X \mid 全単射 \}$$

と書くことにする。

問 1.1：任意の集合 X について、$\mathfrak{S}(X)$ は "写像の合成" に関して群をなすことを示せ。

X を集合とし、G を群とする。

Def 1.1（群作用）

G の X への作用とは、G から $\mathfrak{S}(X)$ への群準同型のこと

作用 $\rho : G \to \mathfrak{S}(X)$ を $G \overset{\rho}{\curvearrowright} X$ とも書く。

また、各 $x \in X$, $g \in G$ について

$$g \underset{\rho}{\cdot} x := \rho(g)(x) \quad (\in X)$$

と書くことにする。

群の作用について，いくつか用語を定義しておく．

以下，作用 $G \overset{\varrho}{\curvearrowright} X$ について考える．

Def 1.2: X の部分集合 Y が

(G, ϱ)-不変（または単に G-不変）

であるとは，

$\forall y \in Y, \forall g \in G, \; g \cdot_{\varrho} y \in Y$

が成り立つこと．

Def 1.3: 各 $x \in X$ について

$$G \cdot_{\varrho} x := \{ g \cdot_{\varrho} x \in X \mid g \in G \}$$

を x の (G, ϱ)-軌道という．

（または単に G-軌道）

問 1.2: 任意の $x \in X$ について，x の (G, ϱ)-軌道は (G, ϱ)-不変であることを示せ．

Def 1.4: $x \in X$ が (G, ρ)-固定点 であるとは,

$$\forall g \in G, \quad g \cdot_\rho x = x$$

が成り立つこと

Rem x が (G, ρ)-固定点

$$\Longleftrightarrow \quad G \cdot_\rho x = \{x\}$$

例 1.5: $G = \mathbb{R}$ (加法群)

$X = \mathbb{R}^2$ とおく

各 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\rho(\theta) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

とすると,

ρ は $\mathbb{R} (= G)$ の $\mathbb{R}^2 (= X)$ への作用を定める.

問 1.3: (1) 上記 ρ が作用を定めていることを確認せよ

(2) 上記の例で (G, ρ)-固定点をすべて求めよ.

例 1.6 $G = \mathbb{R}^n$（加法群）

$X = \mathbb{R}^n$ とおく.

各 $v \in \mathbb{R}^n (= G)$ について

$\rho_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto x + v$ とすると

ρ は $\mathbb{R}^n (= G)$ の $\mathbb{R}^n (= X)$ への作用を定める.

↓ 一般化

例 1.7: G : 群とする.

各 $g \in G$ について

$\rho(g) : G \to G,\ x \mapsto g \cdot x$ とすると

ρ は G の G への作用を定める

問 1.4 (1) 上記 ρ が G の G への作用を定めていることを確認せよ

(2) 上記の例で (G, ρ)-固定点が存在しない事を示せ.

§2 可測空間への可測作用と不変測度

以降，各集合 X について

$$2^X := \{ X \text{の部分集合} \}$$ とおく．

Rem： X が有限集合の場合は 2^X も有限で

$\#2^X = 2^{\#X}$ が成り立つ．

Def 2.1：集合 X について

$\mathcal{F} \subset 2^X$ が X 上の完全加法族

であるとは，以下を満たすこと：

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(3) $A_i \in \mathcal{F}\ (i \in \mathbb{N})$ のとき

(可算加法性) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$

Def 2.2：X：集合，$\mathcal{F} \subset 2^X$：完全加法族のとき，

$(X, \mathcal{F})$ を可測空間といい

$\mathcal{F}$ の元を可測集合とよぶ．

この講義では各可測空間 $(X, \mathcal{F})$ について

$$\mathfrak{S}(X,\mathcal{F}) := \left\{ g \in \mathfrak{S}(X) \;\middle|\; {}^{\forall}A \in \mathcal{F},\ \begin{matrix} g(A) \in \mathcal{F} \\ g^{-1}(A) \in \mathcal{F} \end{matrix} \right\}$$

とおき, $(X, \mathcal{F})$ の可測変換群とよぶ.

<u>問2.1</u>: $\mathfrak{S}(X,\mathcal{F})$ が $\mathfrak{S}(X)$ の部分群となることを示せ

<u>Def 2.3</u> G: 群, $(X,\mathcal{F})$: 可測空間とする.

G の $(X,\mathcal{F})$ への可測な作用とは,

G から $\mathfrak{S}(X,\mathcal{F})$ への群準同型のこと

$$\begin{array}{ccc} G & & \mathfrak{S}(X) \\ & & \cup \\ & \xrightarrow[\text{可測な作用}]{\rho} & \mathfrak{S}(X,\mathcal{F}) \end{array}$$

以降，可測空間 $(X, \mathcal{F})$ について考える．

Def 2.4（測度）

$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$（$\infty$ も許す）が $(X, \mathcal{F})$ 上の測度

であるとは，以下を満たすこと．

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ であって

$$\begin{cases} A_i \in \mathcal{F} \ (\forall i \in \mathbb{N}) \\ A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{if } i \neq j \end{cases}$$

を満たすものに対して以下が成り立つ

Case 1　$\exists i \in \mathbb{N}$ s.t. $\mu(A_i) = \infty$ のとき

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \infty$$

Case 2　$\forall i \in \mathbb{N}$ s.t. $\mu(A_i) \neq \infty$ のとき

$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ は $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)$ に収束する．

問 2.2：$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ を $(X, \mathcal{F})$ 上の測度とする．

$\lambda \in (0, \infty)$ に対して

$\lambda\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, $A \mapsto \lambda \cdot \mu(A)$ とおく

このとき $\lambda\mu$ も $(X, \mathcal{F})$ 上の測度となることを示せ．（ただし $\lambda \cdot \infty = \infty$ とする）

この講義では

$$\mathcal{M}(X,\mathcal{F}) := \{ (X,\mathcal{F}) 上の測度 \}$$

と書くことにする.

以降

Gの $(X,\mathcal{F})$ への可測な作用

$$\rho : G \to \mathfrak{S}(X,\mathcal{F})$$

を固定して考える.

☆ ρ は "Gの $\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$ への作用" を誘導する

ことを見よう.

Prop 2.5: 各 $g \in G$, 各 $\mu \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F})$ に対して

$$\rho(g)_*\mu : \mathcal{F} \to [0,\infty] \quad とおく$$

$$A \mapsto \mu(\rho(g)^{-1}(A))$$

このとき $\rho(g)_*\mu$ は $(X,\mathcal{F})$ 上の測度となる.

問 2.3: 上の Prop を示せ.

ここで 各 $g \in G$ に対し

$$\tilde{\rho}(g) : \mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \to \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$$
$$\mu \mapsto \rho(g)_* \mu$$

と定めると

$\tilde{\rho}$ は G の $\underbrace{\mathcal{M}(X, \mathcal{F})}_{\text{集合}}$ への作用を定める.

この $\tilde{\rho}$ を $G \overset{\rho}{\curvearrowright} (X, \mathcal{F})$ の誘導する $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ への作用とよぶ.

<u>問 2.4</u>: $\tilde{\rho}$ が G の $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ への作用を定めている事を確認せよ.

<u>Def 2.6</u>: $G \overset{\tilde{\rho}}{\curvearrowright} \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ についての $(G, \tilde{\rho})$-固定点を $(X, \mathcal{F})$ 上の (G, ρ)-不変測度という.

問2.5: $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ について以下の2条件が同値であることを確認せよ．

(i) μ は (G, ρ)-不変

(ii) ${}^\forall A \in \mathcal{F}$, ${}^\forall g \in G$,

$$\mu(\rho(g)^{-1}(A)) = \mu(A)$$

例2.7（ルベーグ測度）:

$X = \mathbb{R}^n$ とする．

"ルベーグ可測集合" を以下のように定義する．

まず $\mathcal{I}_n = \left\{ (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n \;\middle|\; a_i \lneq b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \cdots, n \right\}$

とし

各 $B = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] \in \mathcal{I}_n$ について

$\mathrm{vol}(B) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ とおく．

次に各 $E \subset \mathbb{R}^n = X$ について

$$\Lambda(E) := \left\{ \mathbb{B} \subset \mathcal{I}_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbb{B} \text{ は有限} \\ \bigcup_{B \in \mathbb{B}} B \supset E \end{array} \right\}$$

とおき．

$\mu^*(E) \in [0, \infty]$ を

$$\mu^*(E) := \begin{cases} \inf_{\mathbb{B} \in \Lambda(E)} \left\{ \sum_{B \in \mathbb{B}} \mathrm{vol}(B) \right\} & (\text{if } \Lambda(E) \neq \emptyset) \\ \infty & (\text{if } \Lambda(E) = \emptyset) \end{cases}$$

として定めよ．

この

$$\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$$

を $X = \mathbb{R}^n$ 上の

$$E \mapsto \mu^*(E)$$

ルベーグ外測度とよぶ

Def2.8 : $A \subset \mathbb{R}^n = X$ （つまり $A \in 2^X$）

がルベーグ可測であるとは

$^\forall D \subset X$,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A \cap D^c)$$

が成り立つこと．

ここで

$$\mathcal{F}_{Lbs} := \{ A \in \mathbb{R}^n \mid A \text{ はルベーグ可測} \}$$

とおく

問2.6 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_{Lbs})$ が可測空間になることを示せ．

以下，例1.6の設定を考えよう．

つまり，$\mathbb{R}^n$ の $\mathbb{R}^n$ への作用

$$\rho : \mathbb{R}^n \to \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n) \text{ が}$$

$$\rho(v) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\quad x \mapsto x + v \quad (v \in \mathbb{R}^n)$$

として定義されている．

実はこの作用 ρ は $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_{\mathrm{Lbs}})$ 上の可測な作用となっている．

問2.7：上記の ρ が $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_{\mathrm{Lbs}})$ 上可測であることを示せ．

特に ρ は $\mathbb{R}^n$ の $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_{\mathrm{Lbs}})$ への作用 $\hat{\rho}$ を誘導する．

No.14

ここで $\mu_{Lbs} : \mathcal{F}_{Lbs} \to [0, \infty]$

$$A \mapsto \mu^*(A)$$

とおく

問 2.8 : μ_{Lbs} で $(X, \mathcal{F}_{Lbs})$ 上の測度であることを示せ

μ_{Lbs} を $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_{Lbs})$ 上のルベーグ測度という.

問 2.9 : μ_{Lbs} は $(\mathbb{R}^n, \rho)$-不変であることを示せ.