数学概論 第2回

2018 6/22

第二回内容と計画（90分）

テーマ：位相群の等質空間

(1) 等質空間の定義

(2) 部分群と等質空間

(3) 位相群の定義

(4) 等質空間に定まる位相

前回やった事

(1) 群作用とその軌道，固定点，を定義．

(2) 可測空間への群の可測作用を定義．

(3) 可測な作用は測度全体のなす集合への作用を誘導する．

(4) $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ測度は群 $(\mathbb{R}^n, +)$ による平行移動作用で不変

今日やる事

(1) 群の等質空間を定義

(2) 部分群と等質空間の対応

(3) 位相群の定義

(4) 等質空間に定まる位相

(5) 等質空間が

ハウスドルフ $\Leftrightarrow$ イソトロピー閉

§3 等質空間と部分群

G : 群, X : 集合 ($X \neq \emptyset$) とする.

$G \overset{\rho}{\curvearrowright} X$: 作用

(i.e. $\rho : G \to \mathfrak{S}(X)$: 群準同型)

Def 3.1 : G の X への作用 ρ が

推移的 (transitive) であるとは,

以下を満たすこと :

$\forall x, y \in X, \ \exists g \in G, \ g \cdot_{\rho} x = y$.

問 3.1 : $G = \mathbb{R}^n$, $X = \mathbb{R}^n$ とし, 作用 $G \overset{\rho}{\curvearrowright} X$ を

$\rho(v)x := x + v \quad (v \in \mathbb{R}^n = G, \ x \in \mathbb{R}^n = X)$

として定める. このとき ρ は推移的

であることを示せ.

$G \overset{\rho}{\curvearrowright} X$ が推移的であるとき

(X, ρ) を等質 G-空間という

(または単に X を)

G : 群

$(X, \rho), (Y, \sigma)$: 等質 G-空間とする.

Def 3.2: 写像 $f: X \to Y$ が

G-同値であるとは, 以下を満たすこと:

$$\forall g \in G, \forall x \in X, \ f(g \cdot_{\rho} x) = g \cdot_{\sigma} f(x)$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d, "\sigma(g)"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Def 3.3: X と Y が G-同型であるとは，以下を満たすこと：

$\exists f : X \to Y$: 全単射 G-同値

X と Y が G-同型であるということを

$X \underset{G}{\cong} Y$ と書くことにする．

"G-同型" は以下の意味で "同値関係" である．

問 3.2 : X, Y, Z を等質 G-空間とする．

以下を示せ：

(1) $X \underset{G}{\cong} X$．

(2) $X \underset{G}{\cong} Y \Leftrightarrow Y \underset{G}{\cong} X$

(3) $X \underset{G}{\cong} Y$ かつ $Y \underset{G}{\cong} Z \Rightarrow X \underset{G}{\cong} Z$

Question：群 G を固定する．

等質 G-空間は G-同型を除いてどのくらいたくさんあるか？

Answer

$$\{\text{等質 } G\text{-空間}\}/G\text{-同型}$$

$$\updownarrow \ 1:1$$

$$\{G \text{ の部分群}\}/\text{共役}$$

これを詳しくみよう．

◎ 等質空間から部分群

(X, ρ)：等質 G-空間とする.

Def. 3.4：各 $x \in X$ について

$$G^x := \{ g \in G \mid g \underset{\rho}{\cdot} x = x \}$$

を G の x におけるイソトロピー部分群とよぶ.

問 3.3：(X, ρ)：等質 G 空間とする.

以下を示せ：

(1) $\forall x \in X$, G^x は G の部分群

(2) $\forall x, y \in X$, G^x と G^y は G 内で共役

問 3.4：X, Y：等質 G-空間, $X \underset{G}{\cong} Y$ とする.

以下を示せ：

$\forall x \in X$, $\forall y \in Y$, G^x と G^y は G 内で共役

Q 部分群から等質空間　　No. 6

H を G の部分群とする.

G における右 H 剰余類全体の集合を

$$G/H := \{ gH \subset G \mid g \in G \}$$

と書くことにする.

$G \overset{\rho}{\curvearrowright} G/H$ を各 $g, g' \in G$ について

$$g \underset{\rho}{\cdot} (g'H) := (gg')H$$

として定めると, $(G/H, \rho)$ は等質 G-空間となる.

この等質 G-空間を (G, H) の定める等質 G-空間とよぶ.

問3.5： 上記の定め方で $\rho : G \to \mathfrak{S}(G/H)$ が well-defined に定まることを示せ.

問3.6： $g \in G$ とする.

G の $gH \in G/H$ におけるイソトロピー部分群は gHg^{-1} であることを示せ

Thm 3.5: G：群とする.

(1) H_1, H_2 : G の部分群とする.
このとき 以下は同値

(i) H_1 と H_2 は G 内で共役

(ii) G/H_1 と G/H_2 は G-同型

(2) 任意の等質 G-空間 X と任意の $x \in X$ について

$$X \underset{G}{\cong} G/G^x$$

問 3.7: 上記定理を示せ.

Rem: 上記定理の意味は

$\{$等質 G-空間$\}/G$-同型

$\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $\{G$ の部分群$\}/$共役

に他ならない.
しかし "$\{$等質 G-空間$\}$" は集合として定義できないので注意が必要である.

例 3.6: $G=(\mathbb{R}^n,+)$ とする.

$$\{\mathbb{R}^n \text{の部分群}\}/\text{共役} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{等質 } \mathbb{R}^n \text{ 空間}\}/\mathbb{R}^n\text{-同型}$$

$$\{0\} \longleftrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{Z}^n \longleftrightarrow \mathbb{T}^n := (S^1)^n$$

$$\mathbb{R}^k \ (k \leq n) \longleftrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

$$\mathbb{Q}^n \longleftrightarrow (\mathbb{R}/\mathbb{Q})^n$$

Rem:
$\mathbb{R}^n$ は可換群なので

$$H_1 \underset{\text{共役}}{\sim} H_2 \iff H_1 = H_2$$

$(H_1, H_2 : \mathbb{R}^n \text{の部分群})$

例 3.7 : $G = O(n)$ とする.

ただし
$$O(n) := \{ g \in M(n;\mathbb{R}) \mid {}^t g \cdot g = I_n \}$$
とする.

$$\{ O(n) \text{ の部分群} \}/_{\text{共役}} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{ \text{等質 } O(n)\text{-空間} \}/_{O(n)\text{-同型}}$$

$$O(n-1) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & * \end{array} \right) \in O(n) \right\} \longleftrightarrow S^{n-1}$$

$(n-1)$-次元球面

$$O(k) \times O(n-k) = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{}^{k} & \overbrace{}^{n-k} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} * & \\ \hline & * \end{array} \right) \end{array} \in O(n) \right\} \longleftrightarrow Gr_k(\mathbb{R}^n)$$

ただし $Gr_k(\mathbb{R}^n) := \{ k\text{-dim'l 部分空間 in } \mathbb{R}^n \}$.

§4 位相群とその等質空間

G：群，$\mathcal{O}_G$：G 上の位相 とする．

Def 4.1 $(G, \mathcal{O}_G)$ が位相群であるとは以下を満たすこと：

$$\begin{cases} G \times G \to G, & (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2 \\ G \to G, & g \mapsto g^{-1} \end{cases}$$

が $(G \times G, \langle \mathcal{O}_G \times \mathcal{O}_G \rangle)$，$(G, \mathcal{O}_G)$ について連続．

ただし，$\langle \mathcal{O}_G \times \mathcal{O}_G \rangle$ は直積位相とする．

例 4.2：群 $(\mathbb{R}^n, +)$ は $\mathbb{R}^n$ の標準的な位相に関して位相群となる。

問 4.1：上を示せ。

例 4.3：$O(n) := \{ g \in M(n;\mathbb{R}) \mid {}^t g \cdot g = I_n \}$

上に $M(n;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ の標準的な位相から誘導される相対位相 $\mathcal{O}_{O(n)}$ を考えると $O(n)$ は $\mathcal{O}_{O(n)}$ について位相群

問 4.2：上を示せ。

G：位相群

(X, e)：等質 G-空間 $\left(\begin{array}{l}\text{i.e.} \\ X：\text{集合} (X \neq \emptyset) \\ G \curvearrowright X：\text{推移的}\end{array}\right)$

Question：X に位相を定めたい．
自然なものはあるか？

Answer：$x \in X$ を固定すると
$X \underset{G}{\cong} G/G^x$ なので G の位相の
商位相を定めればよい．

これを詳しくみる．

各 $x \in X$ について，全射写像 $\pi_x : G \to X$ を

$\pi_x : G \to X,\ g \mapsto g \cdot x$ と定める．

Thm. 4.4:

(1) X 上の位相 $\mathcal{O}_X$ について，以下は同値

(i) ${}^\forall x \in X$, $\pi_x : G \to X$ は連続開写像

(ii) ${}^\exists x \in X$, $\pi_x : G \to X$ は連続開写像

(2) 上記条件を満たす位相 $\mathcal{O}_X$ は一意

(3) $x \in X$ を任意に固定したとき，

$\mathcal{O}_X := \{ U \subset X \mid \pi_x^{-1}(U) : \text{open in } G \}$

は上記条件を満たす X 上の位相である．

問 4.3: 上記定理を示せ．

G：位相群

X, Y：等質 G-空間

$\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$：Thm. 4.4で定めた X, Y の自然な位相

Prop. 4.5：

$X \underset{G}{\cong} Y$ のとき，

$(X, \mathcal{O}_X)$ は $(Y, \mathcal{O}_Y)$ と同相

問 4.4：上の命題を示せ．

G：位相群

(X, ρ)：等質 G-空間

$\mathcal{O}_X$：Thm. 4.4 で定めた位相.

Question：$(X, \mathcal{O}_X)$ はハウスドルフ？

Answer：一般には No.

$$\{\text{等質 } G\text{-空間}\}/G\text{-同型} \supset \{\text{ハウスドルフな等質 } G\text{-空間}\}/G\text{-同型}$$

$$\updownarrow \ 1:1 \qquad\qquad \updownarrow \ 1:1$$

$$\{G \text{ の部分群}\}/\text{共役} \supset \{G \text{ の閉部分群}\}/\text{共役}$$

問 4.5：G：位相群，H_1, H_2：G の部分群とし，H_1, H_2 は G 内で共役とする.
このとき H_1：閉 in $G \Leftrightarrow H_2$：閉 in G を示せ.

Thm 4.6 : (X, ρ) についての以下の4条件は同値 :

(i) $(X, \mathcal{O}_X)$ は T_1 - 空間

$\left(\begin{array}{l} \text{i.e. } {}^\forall x, y \in X, \\ \quad {}^\exists U : y \text{ の開近傍 s.t.} \\ \qquad x \notin U \end{array}\right)$

(ii) $(X, \mathcal{O}_X)$ は ハウスドルフ空間

$\left(\begin{array}{l} \text{i.e. } {}^\forall x, y \in X, \\ \quad {}^\exists U_x : x \text{ の開近傍} \\ \quad {}^\exists U_y : y \text{ の開近傍 s.t.} \\ \quad U_x \cap U_y = \emptyset \end{array}\right)$

(iii) ${}^\forall x \in X$, G^x は閉 in G

(イソトロピー閉)

(iv) ${}^\exists x \in X$, G^x は閉 in G

Thm 4.6 の証明の流れ:

$$
\begin{tikzcd}
(\mathrm{i}) \arrow[rr, Rightarrow] & & (\mathrm{iii}) \arrow[d, Rightarrow, shift left, "(\text{trivial})"] \\
(\mathrm{ii}) \arrow[u, Rightarrow, "(\text{Definition})"'] & & (\mathrm{iv}) \arrow[ll, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow, shift left, "\text{共役性}"]
\end{tikzcd}
$$

(i) $\Rightarrow$ (iii) と (iv) $\Rightarrow$ (ii) を示そう.

(i) $\Rightarrow$ (iii) の証明

$\neg$(iii) を仮定する. $\neg$(i) を示す.

示 $\neg$(i) i.e. $(X, \mathcal{O}_X)$ は T_1 でない

i.e. $^\exists x, y \in X$, $^\forall U$: y の開近傍 $x \in U$

$\neg$(iii) の仮定から "G^x : 閉でない in G" となる $x \in X$ がとれる.

このとき

$\overline{G^x} \supsetneq G^x$ (ただし $\overline{G^x}$ は G における G^x の閉包)

より $y \in \overline{G^x} \setminus G^x$ でとれる.

示 $^\forall U$: y の開近傍, $x \in U$

$^\forall U$: y の開近傍 をとる.

$x \in \pi_x(\pi_x^{-1}(U))$ を示せば十分.

($\pi_x(\pi_x^{-1}(U)) \subset U$ なので)

$\pi_x^{-1}(U)$ は開 in G で $y \in \pi_x^{-1}(U)$

なので $\pi_x^{-1}(U) \cap G^x \neq \emptyset$

g_0 を $\pi_x^{-1}(U) \cap G^x$ の元としてとる.

ここで

$$\pi_x(\pi_x^{-1}(U)) \ni \pi_x(g_0) \quad (\because g_0 \in \pi_x^{-1}(U))$$
$$= x \quad (\because g_0 \in G^x)$$

これで 7(i) が示された. ∎

(iv) ⇒ (ii) の証明

Prop 4.7
位相空間 Z 上の同値関係 $\sim$ について, 以下は同値
(i) $Z/\sim$ は商位相についてハウスドルフ.
(ii) $R := \{(z_1, z_2) \in Z \times Z \mid z_1 \sim z_2\}$ は $Z \times Z$ の直積位相に関して閉集合.

問 4.6: Prop. 4.7 を示せ.

(iv) を仮定する. (ii) を示す.

示 (ii) i.e. $(X, \mathcal{O}_X)$ はハウスドルフ

$x \in X$ を固定する.

$\mathcal{O}_X$ は $\pi_x : G \to X,\ g \mapsto g \cdot x$ について

の商位相であった (Thm. 4.4).

Prop. 4.7 より以下を示せば了

示 $R := \{(g_1, g_2) \mid g_1 \cdot x = g_2 \cdot x\}$

は閉 in $G \times G$

いま $\sigma : G \times G \to G \times G$

$(g, h) \mapsto (g, gh)$

は同相写像

問 4.7 : $\sigma : G \times G \to G \times G$ が

同相であることを示せ.

(iv) の仮定より

$$G \times G^{x} \text{ は閉 in } G \times G$$

特に $\sigma(G \times G^{x})$ は閉 in $G \times G$.

ここで $\sigma(G \times G^{x}) = R$ となる.

問 4.8：上の等号を示せ.

よって R は閉 in $G \times G$ $\boxtimes$.