数学概論第3回

2018 6/25

前々回やった事

(1) 群作用とその軌道，固定点，を定義．

(2) 可測空間への群の可測作用を定義．

(3) 可測な作用は測度全体のなす集合への作用を誘導する．

(4) $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ測度は群 $(\mathbb{R}^n, +)$ による平行移動作用で不変

前回やった事

(1) 群の等質空間を定義

(2) 部分群と等質空間の対応

(3) 位相群の定義

(4) 等質空間に定まる位相

(5) 等質空間が
ハウスドルフ $\Leftrightarrow$ イソトロピー閉

今日やる事

(1) ラドン測度の定義

(2) ラドン測度と積分作用素の対応

(3) 局所コンパクト等質空間で

イソトロピーコンパクト

$\Longrightarrow$ 不変ラドン測度を

(定数倍を除いて) 一意に持つ

§5. ラドン測度と表現定理　No.1

$(X, \mathcal{O}_X)$：位相空間とする。

$\mathcal{F}(\mathcal{O}_X)$：$\mathcal{O}_X$ を含む最小の完全加法族

$\mathcal{F}(\mathcal{O}_X)$ を $(X, \mathcal{O}_X)$ 上のボレル集合族とよぶ

問5.1：集合 X と $\mathcal{O} \subset 2^X$ を任意に固定する。

$\Lambda_{\mathcal{O}} := \{ \mathcal{F} \subset 2^X \mid \mathcal{F}$ は完全加法族, $\mathcal{F} \supset \mathcal{O} \}$ とすると,

$$\mathcal{F}(\mathcal{O}) := \bigcap_{\mathcal{F} \in \Lambda_{\mathcal{O}}} \mathcal{F} \ (\subset 2^X)$$ も完全加法族となることを示せ

（$\mathcal{F}(\mathcal{O})$ は $\mathcal{O}$ を含む最小の完全加法族とよばれる）

以下では $(X, \mathcal{O}_X)$ が

局所コンパクト $\left(\begin{array}{l} \text{i.e. } {}^\forall x \in X, {}^\exists A \subset X \text{ s.t.} \\ \qquad x \in A^\circ \text{ かつ } A \text{ はコンパクト} \end{array} \right)$

かつ ハウスドルフ な場合を考える。

Def. 5.1 $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}(\mathcal{O}_X))$

(i.e. μ は $(X, \mathcal{F}(\mathcal{O}_X))$ 上の測度)

が $(X, \mathcal{O}_X)$ 上の ラドン 測度であるとは、

以下を満たすこと：

(i) ${}^\forall A \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_X)$ with A：コンパクト，$\mu(A) \neq \infty$.

(ii) (外部正則性) ${}^\forall E \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_X)$,

$$\mu(E) = \inf \left\{ \mu(U) \;\middle|\; \begin{array}{l} U \in \mathcal{O}_X \\ E \subset U \end{array} \right\}.$$

(iii) (内部正則性) ${}^\forall U \in \mathcal{O}_X$

$$\mu(U) = \sup \left\{ \mu(A) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \subset U \\ A : \text{コンパクト} \end{array} \right\}.$$

問5.2： $\mathbb{R}^n$ の標準的な位相を $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ と書くことにする.

(1) $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ可測集合の族 $\mathcal{F}_{Lbs}$ は $\mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$ と一致する事を示せ.

(2) $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ測度は $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_X)$ 上のラドン測度であることを示せ.

＠ ラドン測度と積分作用素

$(X, \mathcal{O}_X)$：局所コンパクトハウスドルフ空間

$$C_c(X) := \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ は連続}, \ \mathrm{supp} f \text{ はコンパクト} \}$$

ただし $\mathrm{supp} f := \overline{\{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}} \subset X$ とする.

問 5.3：以下を示せ：

(1) $\forall f, h \in C_c(X)$, $f+h \in C_c(X)$

ただし $(f+h)(x) = f(x) + h(x)$ $(x \in X)$

(2) $\forall f \in C_c(X)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda f \in C_c(X)$

ただし $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ $(x \in X)$

(3) 上記構造により $C_c(X)$ は $\mathbb{C}$-ベクトル空間となる.

Question：$(X, \mathcal{O}_X)$ 上のラドン測度は

どれくらいたくさんある？

Answer：

$\{$ラドン測度 on $(X, \mathcal{O}_X)\}$ $(\subset \mathcal{M}(X, \mathcal{F}(\mathcal{O}_X)))$

$\updownarrow$ 1:1

$\{C_c(X)$ 上の正値汎関数$\}$

これを詳しくみる.

◎ ラドン測度から正値汎関数

$\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}(\mathcal{O}_X))$ をラドン測度とする.

Prop. 5.2：任意の $f \in C_c(X)$ は μ について L^1-可積分である.

問 5.4：上の命題を示せ.

$f \in C_c(X)$ の μ についての積分を
$$\int_X f \, d\mu \quad (\in \mathbb{C})$$
と書く.

また
$$I_\mu : C_c(X) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_X f \, d\mu$$
とおく.

この I_μ を μ の定める積分作用素とよぶ.

Def. 5.3: 写像 $I : C_c(X) \to \mathbb{C}$ が

$\mathbb{C}$-線型のとき，汎関数という.

また汎関数 $I : C_c(X) \to \mathbb{C}$ が正値であるとは，以下を満たすこと:

$^\forall f \in C_c(X)$ with $f \geq 0$, $I(f) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

ただし "$f \geq 0$" は "$^\forall x \in X$, $f(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$" のこと.

問 5.4: μ を $(X, \mathcal{O}_X)$ 上のラドン測度とする.

このとき $I_\mu : C_c(X) \to \mathbb{C}$ が正値汎関数であることを示せ.

Thm. 5.4 (ラドン測度の表現定理):

$(X, \mathcal{O}_X)$ を局所コンパクトなハウスドルフ空間とする.

(1) μ_1, μ_2 : ラドン測度 on $(X, \mathcal{O}_X)$ について

$$\mu_1 = \mu_2 \iff I_{\mu_1} = I_{\mu_2}.$$

(2) ${}^\forall I : C_c(X) \to \mathbb{C}$: 正値汎関数,

${}^\exists \mu$: ラドン測度 on $(X, \mathcal{O}_X)$

s.t. $I = I_\mu$.

問 5.5: 上の定理を示せ.

$$\{\text{ラドン測度 on } (X, \mathcal{O}_X)\} \ (\subset \mathcal{M}(X, \mathcal{F}(\mathcal{O}_X)))$$

$$\updownarrow \ 1:1$$

$$\{C_c(X) \text{ 上の正値汎関数}\}$$

§6：局所コンパクト等質空間上の不変ラドン測度

G：位相群

(X, ρ)：等質 G-空間

$\mathcal{O}_X$：X 上の自然な位相（前回参照）

問6.1：$G \overset{\rho}{\curvearrowright} X$ は $\mathcal{F}(\mathcal{O}_X)$ について

可測な作用であることを示せ．

$G \overset{\tilde{\rho}}{\curvearrowright} \mathcal{M}(X, \mathcal{F}(\mathcal{O}_X))$：

可測な作用 ρ の誘導する

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}(\mathcal{O}_X))$ への G-作用

（前々回参照）

以下，G：局所コンパクト，ハウスドルフ

$\left(\text{i.e. } {}^\forall g \in G,\ {}^\exists A \subset G \text{ s.t. } g \in A^\circ,\ A\text{:コンパクト} \right)$

かつ

$G \overset{\rho}{\curvearrowright} X$ はイソトロピー閉

$\left(\underset{\text{Thm. 4.6.}}{\Leftrightarrow} (X, \mathcal{O}_X) \text{ がハウスドルフ} \right)$

とする．

問 6.2：$(X, \mathcal{O}_X)$ は局所コンパクトであることを示せ．

問 6.3：$g \in G$，$\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}(\mathcal{O}_X))$ とする．

μ がラドン測度であるとき，$g \cdot_\rho \mu$ もラドン測度であることを示せ．

問 6.4：以下を示せ：

(1) ${}^\forall g \in G$, ${}^\forall f \in C_c(X)$, $f \circ \rho(g^{-1}) \in C_c(X)$.

(2) ラドン測度 μ on $(X, \mathcal{O}_X)$ について

μ が G-不変 $\Leftrightarrow$ $I_\mu : C_c(X) \to \mathbb{C}$ が G-不変

$\left(\text{i.e. } {}^\forall g \in G,\ {}^\forall f \in C_c(X),\ I_\mu(f \circ \rho(g^{-1})) = I_\mu(f) \right)$

Question：等質 G-空間 X は非自明な G-不変ラドン測度を持つ？

(Rem: $0 : \mathcal{F}(\mathcal{O}_X) \to [0,\infty]$
$E \mapsto 0$
は自明な G-不変ラドン測度)

Answer：一般には No.

しかしイソトロピーコンパクトなら
そのような測度が定数倍を除いて
一意に存在する.

これを詳しくみる.

G：局所コンパクトハウスドルフ位相群

(X, ρ)：等質 G-空間　$(X \neq \emptyset)$

$G \overset{\rho}{\curvearrowright} X$ はイソトロピーコンパクト

$(\text{i.e. } {}^\forall x \in X,\ G^x$：コンパクト$)$　とする.

（Rem：G にハウスドルフ性を仮定したので
イソトロピーコンパクト $\Rightarrow$ イソトロピー閉）

Thm 6.1：$\mathcal{O}_X$ を (X, ρ) の自然な位相とする（Thm 4.4参照）

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$ 上の非自明な G-不変ラドン測度は存在する.

(2) μ_1, μ_2：$(X, \mathcal{O}_X)$ 上の G-不変ラドン測度
$\Rightarrow {}^\exists \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ \lambda \mu_1 = \mu_2$

例6.2： $G = (\mathbb{R}^n, +, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$ は

局所コンパクトハウスドルフ位相群．

$\mathbb{R}^n \overset{\rho}{\curvearrowright} \mathbb{R}^n$ ： $\rho(v)(x) := x + v \quad (x, v \in \mathbb{R}^n)$

（平行移動作用）とする．

$(X, \rho) = (\mathbb{R}^n, \rho)$ は

イソトロピーフリー $(\text{i.e. } {}^{\forall} x \in X,\ G^x = \{e\})$

な等質 $\mathbb{R}^n (= G)$ 空間．

自然な位相 $\mathcal{O}_X$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$（標準的な位相）．

ルベーグ測度 μ_{Lbs} は $(X, \mathcal{O}_X) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$ 上

の非自明な $G = (\mathbb{R}^n, +)$ -不変ラドン測度．

逆に Thm 6.2(2) より，$(X, \mathcal{O}_X) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$ 上の

$G = (\mathbb{R}^n, +)$ -不変ラドン測度 μ について

${}^{\exists} \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{s.t.} \quad \mu = \lambda \mu_{Lbs}$．

例 6.3：

$(G, \mathcal{O}_G)$：局所コンパクトハウスドルフ位相群

$G \overset{\rho}{\curvearrowright} G$ を $\rho(g)x := g \cdot x \quad (g, x \in G)$ とする.

このとき $(X, \rho) = (G, \rho)$ は

イソトロピーフリーな等質 G-空間.

自然な位相 $\mathcal{O}_X$ は $\mathcal{O}_G$ と一致.

このとき Thm 6.2 より $(G, \mathcal{O}_G)$ 上の

非自明な G-不変ラドン測度が定数倍を

除いて一意に存在する.

このような測度を

G 上のハール測度とよぶ.

(Haar)

例 6.4：

$G = O(n) := \{ g \in M(n, \mathbb{R}) \mid {}^t g \cdot g = I_n \}$

はコンパクトハウスドルフ位相群

$S^{n-1} := \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1 \}$ （$n-1$）次元球面

は等質 $O(n)$ 空間

イソトロピー $\cong O(n-1)$ （コンパクト）

Thm 6.2 より，S^{n-1} 上の $O(n)$-不変ラドン測度は定数倍を除いて一意に存在する.

Rem：S^{n-1} に自然な C^∞-多様体構造を入れると $O(n)$-不変 $(n-1)$ 形式が存在する.
この $(n-1)$ 形式を用いて S^{n-1} 上の $O(n)$ 不変ラドン測度を書き下すこともできる.

Thm 6.2 (1) の証明に
"イソトロピーコンパクト性" は
以下の形で用いられる.

Lemma 6.5 : $x_0 \in X$, $h \in C_c(X)$, $\delta > 0$ とする.

このとき $^\exists V$: x_0 の開近傍 s.t.

"$^\forall x \in V$, $^\forall g \in G$, $|h(gx_0) - h(gx)| < \delta$"

問 6.4 : 上記 Lemma を示せ.

例 6.6 :

G_0 : 局所コンパクトハウスドルフ位相群 とし,

$$G = G_0 \times G_0$$
$$X = G_0$$

とおく.

$$\underset{\substack{\parallel \\ G_0 \times G_0}}{G} \overset{\rho}{\curvearrowright} \underset{\substack{\parallel \\ G_0}}{X}$$

を

$$\rho(g_1, g_2)x = g_1 \cdot x \cdot g_2^{-1} \quad (g_1, g_2, x \in G_0)$$

と定めると

(X, ρ) は等質 G 空間であり

イソトロピー $\cong G_0$ となる.

Case 1: G_0 がコンパクトのとき

Thm 6.2 が使えて,

$X = G_0$ は $G = G_0 \times G_0$ 不変
ラドン測度を定数倍を除いて
一意に持つ.

これは "G_0 上の Haar 測度は両側不変"
ということを意味している.

Case 2: G_0 が非コンパクトのとき

イソトロピーは非コンパクトなので

Thm. 6.2 は使えない.

一般にはこのようなとき

G_0 が $G_0 \times G_0$ 不変ラドン測度を持つとは

限らない.

問 6.5: 局所コンパクト群 G_0 であって

$G_0 \times G_0$-不変測度を持たない例を挙げよ.

しかし次の事も知られている.

Thm 6.7: G_0 が半単純 Lie 群 $\left(\begin{array}{l}\text{Ex:}\\ SL(n,\mathbb{R})\end{array}\right)$

のとき, G_0 は $G_0 \times G_0$ 不変ラドン測度

を持つ (ユニモジュラー性)