幾何学A（担当：奥田隆幸）

内容：多様体論

扱うトピック：
- C^∞-多様体
- C^∞-写像
- 接空間
- ベクトル場（微分方程式）
- C^∞-写像の微分

講義の構成（予定）

Part I　　多変数関数の微分

Part II　　局所座標

Part III　　可微分多様体

Part IV　　可微分多様体の間の写像

今日の内容

§1：イントロダクション

§2：多変数 C^∞-級関数

§1 イントロダクション

Recall： 位相空間 … 連続性のギロンができる集合

（"開集合系"を定めた）

多様体： 微積分のギロンができる位相空間

（"局所座標系"を定める）

幾何学Aでは多様体上の微分論を扱う

（積分論は幾何学D）

モチベーションの1つ："位相空間上の微分方程式"を定義したい。

例：地球上の気象変動を表す数理モデルを作りたい。

⇝「2次元球面上で"微分方程式"を考える」

というモデルを考えたい。

⇝ そもそも 2次元球面上の"微分方程式"の定義を

(数学者の仕事) きちんと与えておく必要がある。

@ 何が難しいか).

$$S^2 := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$ とおく,

S^2 上の関数 $f : S^2 \to \mathbb{R}$ を考える.

“fの偏導関数”はどうやって定義する?

失敗例

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) := \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}$$ とおく.

$((x,y,z)\in S^2)$

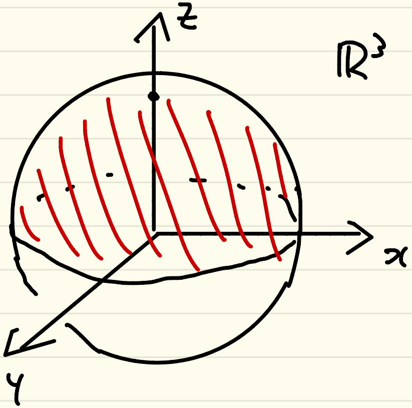
fはS^2上でのみ定義されているので

$f(x+h,y,z)$は定義できない.

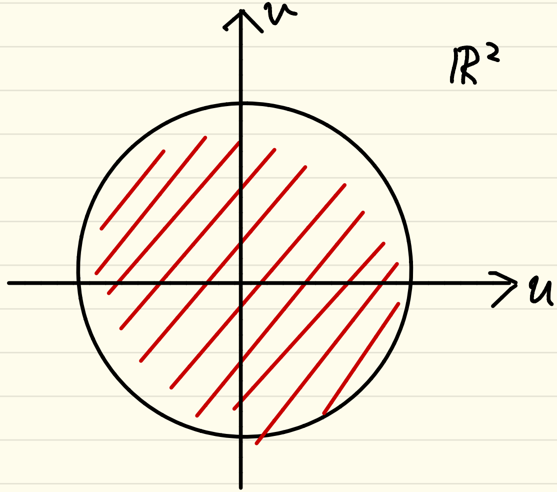
◎ アイディア

局所的に座標を与える（多様体論の中心的アイディア）

⇝ 局所的に偏導関数が定義できる.



同一視 ⟶



この場合, 北半球上で $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ を考えることができる.

更に"ベクトル場"の概念を用いると

大域的に微分方程式が定義できる!

⤳ 大域解析学の土台となる.

(例:球面上の調和解析など)

§2 n変数 C^∞-級関数

内容

- C^∞-級関数の定義
- C^∞-級関数の各種構成
- C^∞-級関数全体のなす $\mathbb{R}$-代数

◎ C^∞-関数の定義

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix.

$\mathbb{R}^n := \{ x = (x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \}$: n 次元ユークリッド空間

(位相空間かつベクトル空間)

$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, \cdots, 0, 1)$: 標準基底

とする.

以下, $\underset{\neq \emptyset}{U} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ を fix.

Def. 2.1：写像 $f: U \to \mathbb{R}$ が U 上の C^0-級関数であるとは

f が U 上連続であること.

Def. 2.2：$k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする.

写像 $f: U \to \mathbb{R}$ が U 上の C^k-級関数であるとは

各 $i = 1, \cdots, n$ について

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f : U \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(p + he_i) - f(p)}{h}$$

偏導関数

が well-defined であり, U 上の C^{k-1} 級関数であること.

(帰納的定義)

Prop. 2.3 : C^k級関数は C^{k-1}級関数 $(\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$

(注: $k=1$ の場合が本質的:
C^1-級 ⇒ 全微分可能 ⇒ 連続 (C^0-級))

Def. 2.4 : 写像 $f: U \to \mathbb{R}$ が U 上の C^∞-級関数であるとは

"$\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, f は U 上の C^k-級関数"

が成り立つこと.

◎ C^∞-級関数の各種構成

Prop. 2.5 : 多項式関数は C^∞-級

Prop. 2.6 : $\alpha \in \mathbb{R}$ とする。

$\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ は $\mathbb{R}_{>0}$ 上 C^∞-級

Prop. 2.7 $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $V \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$

$g : U \to \mathbb{R}$: C^∞-級, $h : V \to \mathbb{R}$: C^∞-級 とする。

このとき $f = h \circ g : U \cap g^{-1}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ は C^∞-級

Ex. 2.7 : $U := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1 \}$ (n次元 open ball)

(小テスト) $f : U \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ は U上 C^∞-級

Proof : $g : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ は

多項式関数なので C^∞-級 ($\because$ Prop 2.5)

また $h : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ は C^∞-級 ($\because$ Prop 2.6)

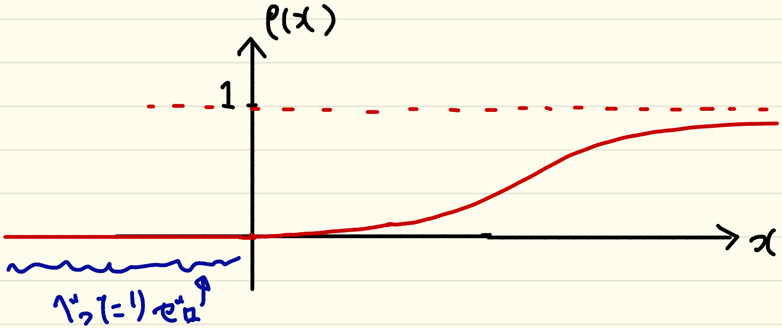
Uとgの定義から $g^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) = U$ に注意すると

$$f = h \circ g : \underset{\underset{U \cap g^{-1}(\mathbb{R}_{>0})}{\shortparallel}}{U} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \text{ は } U\text{上 } C^\infty\text{-級}$$

($\because$ Prop 2.7)

Prop. 2.8 : $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

は $\mathbb{R}$ 上 C^∞-級



Remark : C^∞-級であってもテイラー展開可能とは限らない.

◎ C^∞-級関数のなす $\mathbb{R}$-代数

$\emptyset \neq U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ を fix.

Def. 2.9 :

$C^\infty(U) := \{ f : U \to \mathbb{R} \mid f$ は U 上 C^∞-級$\}$

とおく.

Prop. 2.10 :

$C^\infty(U)$ は "関数の和", "関数のスカラー倍" により実ベクトル空間となる.

ただし

関数の和 : $f_1 + f_2 : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$

$(f_1, f_2 : U \to \mathbb{R})$

関数のスカラー倍 : $\lambda f : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lambda \cdot f(x)$

$(f : U \to \mathbb{R}, \ \lambda \in \mathbb{R})$

Prop 2.10 の証明の準備

Lemma 2.11

$\mathrm{Map}(U;\mathbb{R}) := \{ f : U \to \mathbb{R} \}$ とおく（U 上の関数全体の空間）

$\mathrm{Map}(U;\mathbb{R})$ は関数の和，関数のスカラー倍により

ベクトル空間となる．

（証明は演習問題）

Prop. 2.10 の証明の Hint

以下を示せばよい

㊉ $C^\infty(U)$ は $\mathrm{Map}(U;\mathbb{R})$ の部分空間

i.e.
$$\begin{cases} \underbrace{0}_{U\text{上のゼロ関数}} \in C^\infty(U) \\ {}^\forall f_1, f_2 \in C^\infty(U),\ f_1+f_2 \in C^\infty(U) \\ {}^\forall f \in C^\infty(U),\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda f \in C^\infty(U) \end{cases}$$

以下，演習問題とする．

Prop 2.12 各 $i=1,\cdots,n$ について

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : C^\infty(U) \to C^\infty(U), \quad f \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} f$$

は線型写像

Prop 2.12 の証明の Hint：

以下を示せばよい

① $\forall f \in C^\infty(U)$, $\frac{\partial}{\partial x_i} f : U \to \mathbb{R}$ は C^∞-級

② $\forall f_1, f_2 \in C^\infty(U)$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(f_1 + f_2) = \frac{\partial}{\partial x_i} f_1 + \frac{\partial}{\partial x_i} f_2$

③ $\forall f \in C^\infty(U)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda f) = \lambda \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)$

以下，演習問題とする．

Theorem 2.13 $n \geq 1$ とする. (Recall: $\emptyset \neq U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$)

このとき $C^\infty(U)$ はベクトル空間として無限次元

(Proof) 各 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $f_m : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1^m$ は U 上 C^∞-級

$(n \geq 1)$ (Prop 2.5)

以下を示せば十分

(示) $\{f_m\}_{m=0,1,2,\cdots}$ は一次独立 in $C^\infty(U)$

i.e. $\forall \{c_m\}_{m=0,1,2,\cdots}$: 有限個を除いてゼロであるような実数列,

$$\left(\left({}^\exists m_0 \text{ s.t. } c_{m_0} \neq 0 \right) \Rightarrow \sum_m c_m f_m \neq 0 \right)$$

$\{c_m\}_{m=0,1,2,\cdots}$: 有限個を除いてゼロであるような実数列を任意にとる.

$\exists m_0$ s.t. $c_{m_0} \neq 0$ を仮定する.

以下を示せばよい.

(示) $\sum_m c_m f_m \neq 0$ in $C^\infty(U)$

仮定より $\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid c_m \neq 0\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$

は空でない有限集合であるから

$$m_{max} := \max\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid c_m \neq 0\} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

が存在する.

ここで $f_m(x) = x_1^m$ より

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_m = \begin{cases} m f_{m-1} & (m \geq 1) \\ 0 & (m = 0) \end{cases}$$

に注意すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m_{max}} \left(\sum_m c_m f_m\right)$$

$$= \sum_m c_m \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m_{max}} f_m \qquad (\because \text{Prop } 2.11)$$

$$= c_{m_{max}} (m_{max}!) \cdot f_0$$

$$= \underbrace{c_{m_{max}}}_{\neq 0} \underbrace{(m_{max}!)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{1}_{\text{定数関数} \neq 0}$$

Prop 2.11 より $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m_{max}} : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ は線型写像であり.

$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m_{max}} \left(\sum_m c_m f_m\right) \neq 0$ であることから $\sum_m c_m f_m \neq 0$ ▨

Def. 2.14 V：ベクトル空間$/\mathbb{R}$,

$\bullet : V \times V \to V,\ (v, w) \mapsto v \cdot w$ （V上の二項演算）とする.

$(V, \bullet)$ が $\mathbb{R}$-代数 であるとは 以下を満たすこと

⓪ 二項演算 $\bullet : V \times V \to V$ は 双線型

i.e.

第一成分について線型

$$(v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w + v_2 \cdot w \quad ({}^\forall v_1, v_2 \in V, {}^\forall w \in V)$$

$$(\lambda v) \cdot w = \lambda (v \cdot w) \quad ({}^\forall v \in V, {}^\forall w \in V, {}^\forall \lambda \in \mathbb{R})$$

$$v \cdot (w_1 + w_2) = v \cdot w_1 + v \cdot w_2 \quad ({}^\forall v \in V, {}^\forall w_1, w_2 \in V)$$

$$v \cdot (\lambda w) = \lambda (v \cdot w) \quad ({}^\forall v \in V, {}^\forall w \in V, {}^\forall \lambda \in \mathbb{R})$$

第二成分について線型

Prop. 2.15 ベクトル空間 $C^\infty(U)$ は "関数の積" により
可換 $\mathbb{R}$-代数 となる.

ただし 関数の積 : $f_1 \cdot f_2 : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \underbrace{f_1(x) \cdot f_2(x)}_{\mathbb{R}\text{の積}}$

$(f_1, f_2 : U \to \mathbb{R})$