§10 接空間，ベクトル場

内容

- 多様体上の接空間の定義
- 多様体上のベクトル場の定義

● 多様体上の接空間の定義

設定： $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M = (M, \mathcal{A})$ ： n 次元 C^∞-級多様体

$p \in M$　（$\mathcal{A}$ は省略されることが多い）　を fix

記号： $C^\infty(M) := C^\infty(M; \mathcal{A}) = \bigcap_{(O,U,\varphi) \in \mathcal{A}} C^\infty(M : (O, U, \varphi))$

$\subset C^0(M)$

部分 $\mathbb{R}$-代数

Def 10.1:

$$T_pM := \left\{ g : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} g \text{ は線型で} \\ p \in M \text{ におけるライプニッツ則} \\ \text{を満たす} \end{array} \right\}$$

i.e. $\forall f, g \in C^\infty(M)$,

$$g(f \cdot g) = g(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot g(g)$$

とおく.

T_pM を"M の p における接空間"といい,

T_pM の元を"M の p における接ベクトル"という.

Prop 10.2 : T_pM は

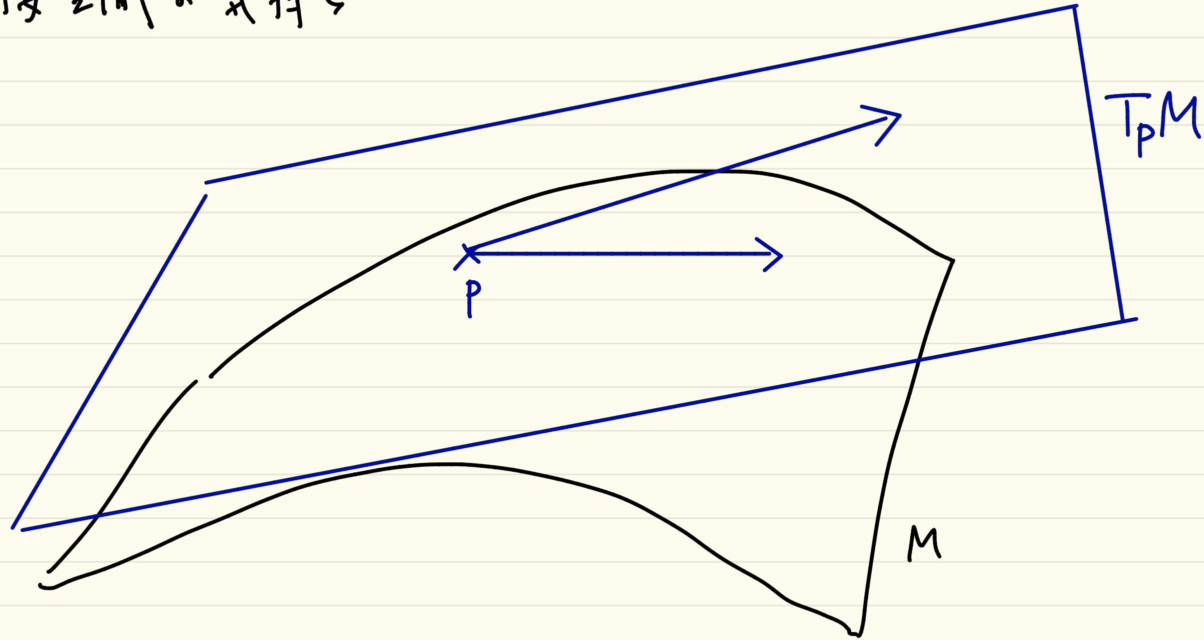
$\mathrm{Hom}(C^\infty(M), \mathbb{R}) := \{ \xi : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid \xi$ は線型 $\}$

の線型部分空間

(Check : $\mathrm{Hom}(C^\infty(M), \mathbb{R})$, T_pM の和とスカラー倍の定義は?)

cf. 補足プリント

接空間の気持ち



キーポイント："外の空間" を一切使わずに T_pM を定義した。

($C^\infty(M)$ を使って)

⑪ 接ベクトルの例1 (例2はあとで)

$p \in O$ をとる $(O, U, \pi) \in \mathcal{A}$ を fix

<u>Def 10.3</u>: 各 $i = 1, \cdots, n$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\pi(p)} (f \circ \pi^{-1})$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ \pi^{-1})(\pi(p) + h e_i) - (f \circ \pi^{-1})(\pi(p))}{h}$$

とおく

Recall: $f \circ \pi^{-1} : U \to \mathbb{R}$ は C^∞-級

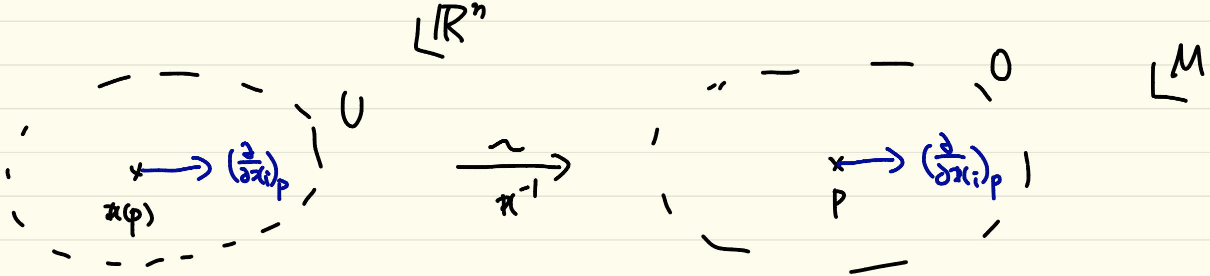
この講義の独自記号

(通常は $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ と書く (ややこしい))

ただし $e_1, \cdots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ ($\underset{\text{open}}{\supset} U$) の標準基底

<u>Prop 10.4</u>: $\forall i = 1, \cdots, n$, $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_p M$

気持ち：



Rem：後で $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ が
T_pM の基底であることを示す（Thm 3.6 の一般化）

Theorem 10.4: $(O, U, x), (O', V, y) \in \mathcal{A}$ with $p \in O \cap O'$ を fix

期末試験

証明,

具体例

このとき 各 $j = 1, \cdots, n$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(J\tau_{xy} \right)_{x(p)} \right)_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p$$

ただし $\tau_{xy} : \underset{\text{open}}{x(O \cap O')} \subset \mathbb{R}^n \to \underset{\text{open}}{y(O \cap O')} \subset \mathbb{R}^n$ は

(O, U, x) から (O', V, y) への座標変換とし

$(J\tau_{xy})_{x(p)}$ は τ_{xy} の $x(p) \in x(O \cap O')$ における

ヤコビ行列とする.

(Hint: Prop 5.12 を用いる)

◎ 多様体上のベクトル場

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

└ $M = (M, \mathcal{A})$: n 次元 C^∞-級多様体

Def 10.5 : $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ が M 上の C^∞-級ベクトル場

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ X は線型で 場のライプニッツ則を満たす.

i.e. $\forall f, g \in C^\infty(M)$

$X(f \cdot g) = Xf \cdot g + f \cdot Xg$

Def 10.6

$\mathfrak{X}^{\infty}(M) := \{ X : C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M) \mid X$ は M 上の C^{∞}-級ベクトル場$\}$

とおく

Prop 10.7

$\mathfrak{X}^{\infty}(M)$ は

$\mathrm{End}(C^{\infty}(M)) := \{ Y : C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M) \mid Y$ は線型$\}$

の線型部分空間

(Check: $\mathrm{End}(C^{\infty}(M))$, $\mathfrak{X}^{\infty}(M)$ の和, スカラー倍の定義は?)

Prop 10.8: $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, $h \in C^\infty(M)$ について

(ベクトル場の関数倍)

$$hX : C^\infty(M) \to C^\infty(M),\ f \mapsto \underset{\substack{\cap \\ C^\infty(M)}}{h} \cdot \underset{\substack{\cap \\ C^\infty(M)}}{Xf}$$

とおくと、$hX \in \mathfrak{X}^\infty(M)$

Prop 10.9: 上記の"関数倍"により $\mathfrak{X}^\infty(M)$ は $C^\infty(M)$-加群

i.e.

① $C^\infty(M) \times \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathfrak{X}^\infty(M)$ は双線型

② $h_1(h_2 X) = (h_1 h_2) X$

$\forall h_1, h_2 \in C^\infty(M)$, $\forall X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$

Prop 10.9 各 $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, $p \in M$ について

$$X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto (Xf)(p) \text{ とおく.}$$

このとき $X_p \in T_pM$

Prop 10.10 $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ について 以下は同値

(i) $X_p = Y_p$ in T_pM for any $p \in M$

(ii) $X = Y$ in $\mathfrak{X}^\infty(M)$

<u>Prop 10.9</u> : ${}^{\forall}X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, $[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{X}^\infty(M)$

また $(\mathfrak{X}^\infty(M), [\ ,\ ])$ は $\mathbb{R}$-代数

($n \geq 1$ なら 非結合的, 非可換, 無限次元)

Ex 10.10 $M = S^1$, $\mathcal{A} = [\mathcal{A}_0]$ (Ex 9.20 のもの) とする.

(試験出ない)

$\rightsquigarrow$ $S^1 = (S^1, \mathcal{A})$ は 1 次元 C^∞-級多様体

各 $\theta \in \mathbb{R}$ について

← θ-回転

$$g_\theta : S^1 \to S^1, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ とおく

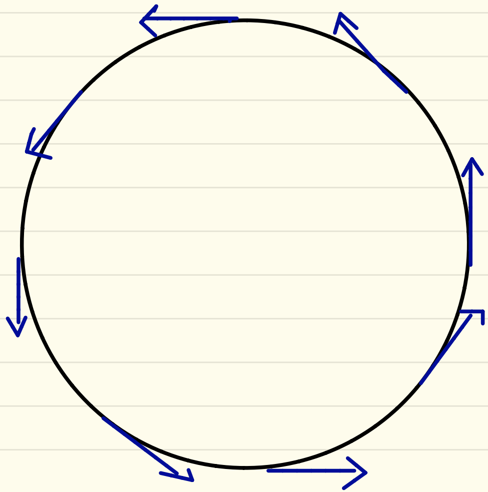
ここで

$$X : C^\infty(S^1) \to C^\infty(S^1), \quad f \mapsto Xf : S^1 \to \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \lim_{\theta \to 0} \frac{f(g_\theta(p)) - f(p)}{\theta}$$

は S^1 上の C^∞-ベクトル場

X を表す図



初期値つき線型常微分方程式

$$\begin{cases} Xf = f \\ f(1,0) = 1 \end{cases}$$

は局所解を持つが、大域解は持たない

(S^1 のトポロジーが障害となる)

Ex 10.11　$M = S^2$, $\mathcal{A} = [\mathcal{A}_0]$ (Ex 9.20 のもの) とする.

(試験出ない)

$\rightsquigarrow$ $S^2 = (S^2, \mathcal{A})$ は 2次元 C^∞-級多様体

各 $\theta \in \mathbb{R}$ について

x_1軸回転

$$g_{1,\theta} : S^2 \to S^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$g_{2,\theta} : S^2 \to S^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & & \sin\theta \\ & 1 & \\ -\sin\theta & & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ x_2軸回転

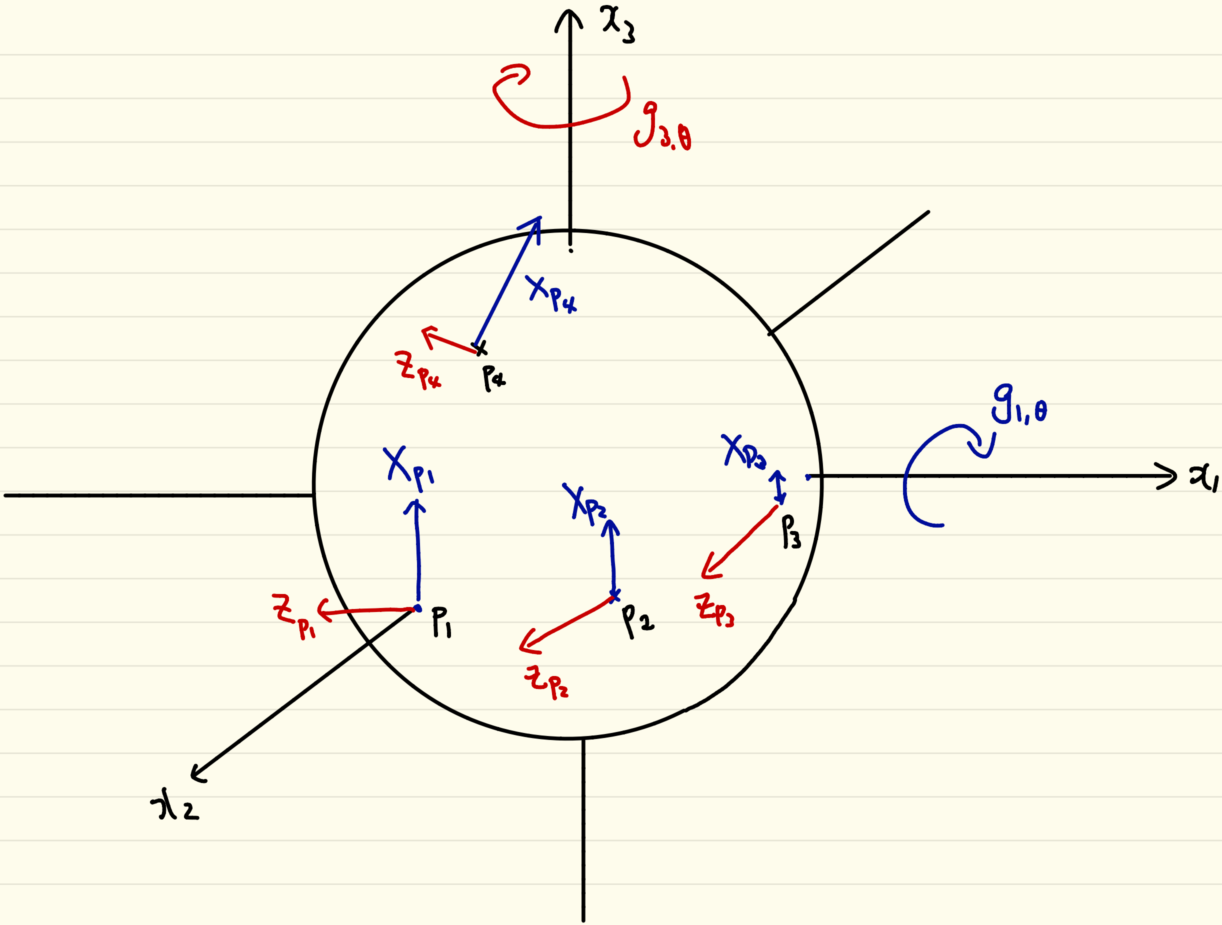
$$g_{3,\theta} : S^2 \to S^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ x_3軸回転

ここで
$$
\begin{aligned}
X : C^\infty(S^2) &\to C^\infty(S^2) \\
f &\mapsto Xf : S^2 \to \mathbb{R} \\
&\qquad\quad p \mapsto \lim_{\theta \to 0} \frac{f(g_{1,\theta}(p)) - f(p)}{\theta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y : C^\infty(S^2) &\to C^\infty(S^2) \\
f &\mapsto Yf : S^2 \to \mathbb{R} \\
&\qquad\quad p \mapsto \lim_{\theta \to 0} \frac{f(g_{2,\theta}(p)) - f(p)}{\theta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z : C^\infty(S^2) &\to C^\infty(S^2) \\
f &\mapsto Zf : S^2 \to \mathbb{R} \\
&\qquad\quad p \mapsto \lim_{\theta \to 0} \frac{f(g_{3,\theta}(p)) - f(p)}{\theta}
\end{aligned}
$$

は 共に C^∞-級ベクトル場



x_3
$g_{3,\theta}$
X_{p_4}
Z_{p_4}
p_4
$g_{1,\theta}$
X_{p_3}
x_1
X_{p_1}
X_{p_2}
p_3
Z_{p_3}
Z_{p_1}
p_1
p_2
Z_{p_2}
x_2

このとき

$$[X, Y] = -Z$$

$$[Y, Z] = -X$$

$$[Z, X] = -Y$$

となる.