§11 写像の微分

内容 ◎ 多様体の間のC$^\infty$-級写像

◎ 写像の微分

◎ 多様体の間の C^∞-級写像

設定：$n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M_k = (M_k, \mathcal{A}_k)$：$n_k$次元 C^∞-級多様体 $(k=1,2)$ を fix

記号：$C^\infty(M_k) := C^\infty(M_k : \mathcal{A}_k) \subset C^0(M)$

部分 $\mathbb{R}$-代数

Def 11.1：写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ が C^∞-級写像であるとは

${}^\forall f \in C^\infty(M_2)$，$\varphi^*(f) \in C^\infty(M_1)$ となること．

$\varphi^*(f) = f \circ \varphi : M_1 \to \mathbb{R}$

Observation 11.2 : C^∞-級写像と C^∞-級関数の合成は C^∞-級関数

(i.e. $\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞-級写像,
$f : M_2 \to \mathbb{R}$: C^∞-級関数 とすると
$f \circ \varphi : M_1 \to \mathbb{R}$ も C^∞-級関数)

(注 : 定義そのもの)

Prop 11.3 : C^∞-級写像同士の合成は C^∞-級写像

Theorem 11.4：写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ について (ii) $\Rightarrow$ (i)

(i) $\varphi : M_1 \to M_2$ は C^∞-級写像

$\Uparrow$

M_1 の地図　　　　M_2 の地図

(ii) $^\forall p \in M_1,\ ^\exists (O, U, \pi) \in \mathcal{A}_1,\ ^\exists (O', V, \psi) \in \mathcal{A}_2$

s.t.
$$\begin{cases} p \in O,\ \varphi(p) \in O' \\ \underbrace{\varphi_{\pi\psi}}_{\psi \circ \varphi \circ \left(\pi|_{O \cap \varphi^{-1}(O')}\right)^{-1}} : \pi(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V,\ x \mapsto \psi(\varphi(\pi^{-1}(x))) \end{cases}$$

$\pi(O \cap \varphi^{-1}(O')) \underset{\text{open}}{\subset} U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_1}$，$V \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_2}$

が C^∞-級

Rem：(i) $\Rightarrow$ (ii) も成り立つ（後で示す）

Thm 11.4 の証明のため以下の補題を用意しておく.

<u>Lemma 11.5</u> : $M=(M, \mathcal{A})$: n 次元多様体 ($n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$) とする.

(i) このとき $[\mathcal{A}]=\mathcal{A}$ (Hint: Prop 9.13 を使う)

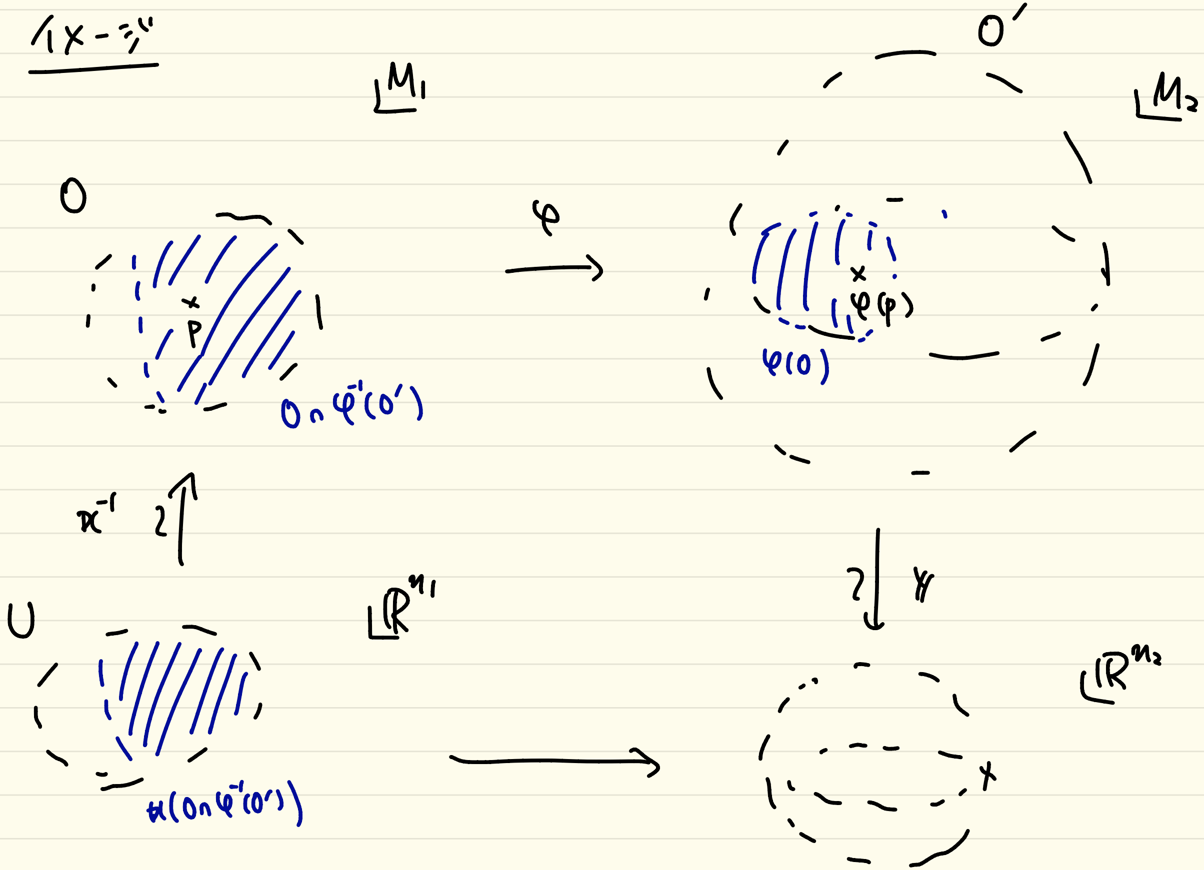
(ii) $(O, U, \varphi)\in\mathcal{A}$ とし,

$\emptyset\neq O_0 \underset{\text{open}}{\subset} O$ を固定する.

このとき $(O_0, \varphi(O_0), \varphi|_{O_0})\in\mathcal{A}$.

(Hint: $(O_0, \varphi(O_0), \varphi|_{O_0})\in[\mathcal{A}]$ を示す.)

イメージ



M_1
O
p
$O \cap \varphi^{-1}(O')$
φ
O'
M_2
$\varphi(p)$
$\varphi(O)$
x^{-1}
$\wr$
$\wr$
y
U
$\mathbb{R}^{n_1}$
$x(O \cap \varphi^{-1}(O'))$
$\mathbb{R}^{n_2}$

<u>証明</u> (ii)を仮定する. (i)を示す.

示 $\forall f \in C^\infty(M_2)$, $\varphi^*(f) \in C^\infty(M_1)$

$\forall f \in C^\infty(M_2)$ をとる.

示 $\varphi^*(f) \in C^\infty(M_1) := C^\infty(M_1; \mathcal{A}_1)$

Cor 9.18 より 以下を示せば十分

示 $\forall p \in M_1$, $\exists (O, U, \pi) \in \mathcal{A}_1$ s.t. $p \in O$ かつ $(\varphi^*(f)) \circ \pi^{-1} \in C^\infty(U)$

$\forall p \in M_1$ をとる.

示 $\exists (O, U, \pi) \in \mathcal{A}_1$ s.t. $p \in O$ かつ $(\varphi^*(f)) \circ \pi^{-1} \in C^\infty(U)$

(ii) より $(\tilde{O}, \tilde{U}, \tilde{\pi}) \in \mathcal{A}_1$, $(O', V, \psi) \in \mathcal{A}_2$ であって

$$\left|\begin{array}{l} p \in \tilde{O}, \quad \varphi(p) \in O' \\ \varphi_{\tilde{\pi}\psi} = \psi \circ \varphi \circ \left(\tilde{\pi}|_{\tilde{O} \cap \varphi^{-1}(O')}\right)^{-1} : \pi(\tilde{O} \cap \varphi^{-1}(O')) \to V \text{ が } C^\infty\text{-級} \end{array}\right.$$

となるものがとれる。 open in $\tilde{O}$

ここで $(O, U, \pi) = (\tilde{O} \cap \varphi^{-1}(O'), \tilde{\pi}(\tilde{O} \cap \varphi^{-1}(O')), \tilde{\pi}|_{\tilde{O} \cap \varphi^{-1}(O')})$

とおくと $(O, U, \pi) \in \mathcal{A}_1$ となる ($\because$ Lemma 11.5 (ii))

この (O, U, π) について考える。

示 $p \in O$ かつ $(\varphi^*(f)) \circ \pi^{-1} \in C^\infty(U)$

(O, U, π) のとり方から $p \in O$ は明らか。

示 $(\varphi^*(f)) \circ \pi^{-1} \in C^\infty(U)$.

以下を示せばよい

(示) $(\varphi^*(f))\circ\pi^{-1}$ は C^∞-級写像と C^∞-級関数の合成で書ける.

いま $\varphi^*(f)\circ\pi^{-1} = f\circ\varphi\circ\pi^{-1}$

$= f\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\varphi\circ\pi^{-1}$ ($\varphi(O)\subset O'$ に注意)

$= (f\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ\varphi\circ\pi^{-1})$

ここで $f\in C^\infty(M_2)$ より $f\circ\psi^{-1}\in C^\infty(V)$.

また (O, U, π), (O', V, ψ) のとり方から

$\psi\circ\varphi\circ\pi^{-1} = \varphi_{\pi\psi}|_U : U\to V$ は C^∞-級写像

従って $(\varphi^*(f))\circ\pi^{-1}$ は C^∞-級写像と C^∞-級関数の合成で書ける.

■

Ex 11.6 S^n, $P(\mathbb{R}^{n+1})$ を Ex 9.20, 9.22 の意味で

n 次元 C^∞-級多様体とみなす.

改めて $S^n = (S^n, \mathcal{A}_{S^n})$

$P(\mathbb{R}^{n+1}) = (P(\mathbb{R}^{n+1}), \mathcal{A}_{P(\mathbb{R}^{n+1})})$ とおく.

Claim

小テスト

このとき $\varphi : S^n \to P(\mathbb{R}^{n+1})$, $x \longmapsto [x]$

は C^∞-級写像

証明 Theorem 11.4 より以下を示せば T/p

(示) ${}^\forall p \in S^n$, ${}^\exists (O, U, \pi) \in \mathcal{A}_{S^n}$, ${}^\exists (O', V, \psi) \in \mathcal{A}_{P(\mathbb{R}^{n+1})}$

s.t. $\begin{cases} p \in O, \ \varphi(p) \in O' \\ \varphi_{\pi\psi} : \pi(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V : C^\infty\text{-級} \end{cases}$

$\varphi_{\pi\psi} = \psi \circ \varphi \circ (\pi|_{O \cap \varphi^{-1}(O')})^{-1}$

$\forall p \in S^n$ をとる.

示 $^\exists(O, U, \pi) \in \mathcal{A}_{S^n}$, $^\exists(O', V, \psi) \in \mathcal{A}_{P(\mathbb{R}^{n+1})}$

s.t. $\begin{cases} p \in O,\ \varphi(p) \in O' \\ \varphi_{\pi\psi} : \pi(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V : C^\infty\text{-級} \end{cases}$

$p = (p_1, \cdots, p_{n+1})$ とおくと, $p \in S^n$ より $\sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 = 1$.

特に $p_i \neq 0$ となる $i = 1, \cdots, n$ が存在する.

このような i を1つ選んで固定しておく.

$p_i > 0$ の場合と $p_i < 0$ の場合にそれぞれ証明を行う.

Case 1 : $P_i > 0$ の場合

このとき

$$\begin{cases} O := \{ x \in S^n \mid x_i > 0 \} \subset S^n \\ U := \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} u_k^2 < 1 \} \subset \mathbb{R}^n \\ \varphi : O \to U, \quad x \mapsto (x_1, \cdots \underset{\substack{\wedge \\ x_i}}{}, x_{n+1}) \end{cases}$$ とおくと

$(O, U, \varphi) \in \mathcal{A}_{S^n}$ $\left(\because \ (O, U, \varphi) = (O_i^{+1}, U_i^{+1}, \varphi^{i,+1}) ; \ \text{Ex 9.4 の証明で} \right)$

また

$$\begin{cases} O' := \{ [x] \in P(\mathbb{R}^{n+1}) \mid x_i \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \ x_i \neq 0 \} \subset P(\mathbb{R}^{n+1}) \\ V := \mathbb{R}^n \\ \psi : O' \to V, \quad [x] \mapsto \frac{1}{x_i} (x_1 \cdots \overset{\substack{x_i \\ \vee}}{} \cdots x_{n+1}) \end{cases}$$

とおくと $(O', V, \psi) \in \mathcal{A}_{P(\mathbb{R}^{n+1})}$ $\left(\because (O', V, \psi) = (O_i, U_i, \varphi^i) ; \right.$

$\left. \text{Ex 8.9 の証明で} \right)$

示 ① $p \in O$, $\varphi(p) \in O'$

③ $\varphi_{\mathcal{U}\mathcal{V}} : \mathcal{U}(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V$ は C^∞-級

① を示す: $p_i > 0$ より $p \in O = \{ x \in S^n \mid x_i > 0 \}$.

(Case 1)

さらに $p_i \neq 0$ より $\varphi(p) = [p] \in O'$.

② を示す: $\varphi(O) \subset O'$ より $\mathcal{U}(O \cap \varphi^{-1}(O')) = U$ となることと,

$\mathcal{U}^{-1} : U \to O,\ u \mapsto \left(u_1, \cdots, u_{i-1}, \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{n} u_k^2}, u_i, \cdots u_n\right)$ に注意すると,

$\mathcal{U}(O \cap \varphi^{-1}(O')) = U = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} u_k^2 < 1 \}$ から $V = \mathbb{R}^n$ で,

$$\varphi_{\mathcal{U}\mathcal{V}} : \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum u_k^2 < 1 \} \to \mathbb{R}^n,\ u \mapsto (\psi \circ \varphi \circ \mathcal{U}^{-1})(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{k=1}^{n} u_k^2}} (u_1, \cdots u_n)$$

これより φ_{uv} は C^∞-級写像 ※ ← 詳しい証明を後述 . これでCase 1 の場合が示された

Case 2 : $p_i < 0$ の場合.

このとき

$$
\begin{cases}
O := \{ x \in S^n \mid x_i < 0 \} \subset S^n \\
U := \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} u_k^2 < 1 \} \subset \mathbb{R}^n \\
u : O \to U , \quad x \mapsto (x_1, \cdots, \hat{x_i}, \cdots, x_{n+1})
\end{cases}
$$

とおく.

以下は Case 1 の場合と同様 ∎

(*)を詳しく書くなら…

(示) $\varphi_{\mathrm{inv}} : \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum u_k^2 < 1\} \to \mathbb{R}^n$ は C^∞-級

$$u \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-\sum_{k=1}^{n} u_k^2}}(u_1, \cdots, u_n)$$

まず $h : \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_k u_k^2 < 1\} \to \mathbb{R},\ u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-\sum_{k=1}^{n} u_k^2}} = \left(1-\sum_{k=1}^{n} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$

は C^∞-級関数（初回小テストと同様に示せる）

特に $\psi : \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_k u_k^2 < 1\} \to \mathbb{R}^{n+1},\ u \mapsto (h(u), u_1, \cdots, u_n)$

は C^∞-級写像（∵各成分が C^∞-級関数）

また $\rho: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n,\quad (a_1, \cdots, a_{n+1}) \mapsto (a_1a_2, a_1a_3, \cdots, a_1a_{n+1})$

$$= a_1(a_2, \cdots, a_{n+1})$$

も C^∞-級写像.

($\because$ 各成分が多項式)

従って

$$\varphi_{n,U} = \rho \circ \psi : \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} u_k^2 < 1 \} \to \mathbb{R}^n$$

も C^∞-級写像 ∎

Def 11.7（多様体の間の C^∞-diffeo）

(i) $\varphi : M_1 \to M_2$ が C^∞-diffeomorphism

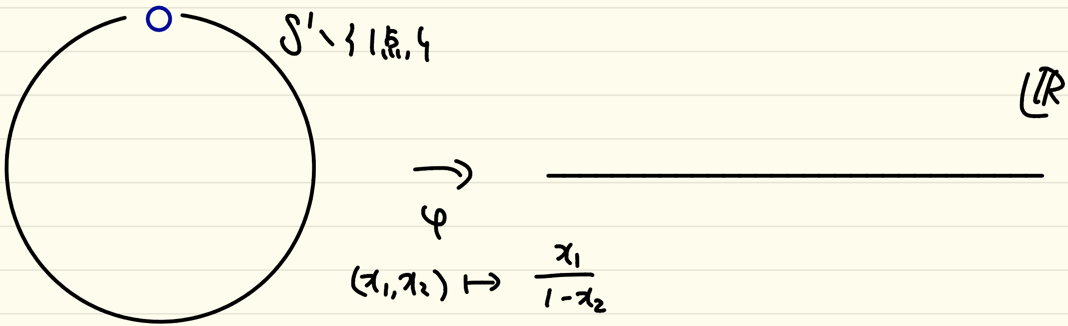
$\underset{\text{def}}{\iff}$ (1) $\varphi : M_1 \to M_2$ は全単射

かつ

(2) φ, φ^{-1} はともに C^∞-級

(ii) $M_1 \cong M_2$: C^∞-diffeomorphic

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $\exists \varphi : M_1 \to M_2$: C^∞-diffeomorphism.



$(x_1, x_2) \mapsto \dfrac{x_1}{1 - x_2}$

Prop 11.8 $\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞- diffeo のとき,

$\varphi^* : C^\infty(M_2) \to C^\infty(M_1)$ は $\mathbb{R}$ 代数同型

◎ 写像の微分

設定：$n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M_k = (M_k, \mathcal{A}_k)$ ： n_k 次元 C^∞-級多様体 $(k=1,2)$

$\varphi : M_1 \to M_2$ ： C^∞-級写像

$p \in M_1$

を fix

ここでは抽象論のみ紹介する（具体例は後ほど）

Def 11.9: $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$

$y \longmapsto y \circ \varphi^*$

$\left(\begin{array}{l} \varphi^* : C^\infty(M_2) \to C^\infty(M_1) \\ \quad f \mapsto f \circ \varphi \end{array} \right)$ に注意

を φ の $p \in M_1$ における微分（または全微分）という

Prop 11.10: $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$, $y \mapsto y \circ \varphi^*$

は well-defined (i.e. ${}^\forall y \in T_pM_1$, $y \circ \varphi^* \in T_{\varphi(p)}M_2$)

で、線型写像となる.

Theorem 11.11　$n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M_k = (M_k, A_k)$: n_k次元多様体　$(k=1,2,3)$ とする.

$\varphi : M_1 \to M_2$
$\psi : M_2 \to M_3$
: C^∞-級写像 とし,

$p \in M_1$ を固定する.

このとき

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p$$

(Hint : Theorem 5.11 と全く同様に示せる.)

Theorem 11.12

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞-diffeo のとき,

各 $p \in M_1$ について

$(d\varphi)_p : T_p M_1 \to T_{\varphi(p)} M_2$ は線型同型

(Hint : $(d\varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ が逆写像であることを示せばよい)