§12：正則部分多様体

内容
- ユークリッド空間の開集合は多様体
- 曲線の速度ベクトル
- 正則部分多様体

（期末試験範囲ここまで）

注意：このセクションではいくつかの Fact を認める．
Fact の証明は後にまわす．
（試験範囲外）

◎ ユークリッド空間の開集合は多様体

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\emptyset \neq U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ を fix

記号：$\mathcal{A}_0 := \{(U, U, \mathrm{id}_U)\} \subset LC(U; \mathbb{R}^n)$

(cf Ex 6.6)

Prop 12.1：$\mathcal{A}_0$ は U 上の C^∞-atlas.

特に $\mathbb{U} = (U, [\mathcal{A}_0])$ は n 次元 C^∞-級多様体

また $C^\infty(U) = C^\infty(U; [\mathcal{A}_0])$

Def 2.9 の意味

@ 曲線の速度ベクトル

設定： $(a,b) \subset \mathbb{R}$: fix　$(-\infty \leqq a < b \leqq +\infty)$

開区間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M = (M, \mathcal{A})$: n次元 C^∞-級多様体 を fix

以降, (a,b) を Prop 12.1 の意味で 1次元 C^∞-級多様体とみなす.

Def 12.2 : C^∞-級写像 $c : (a,b) \to M$ を

M 上の C^∞-級曲線 とよぶ.

Prop 12.3 : $c:(a,b)\to M$: C^∞-級曲線

$t_0\in(a,b)$ とする.

接ベクトルの例 その2

$$\dot{c}(t_0): C^\infty(M)\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$f\longmapsto\lim_{h\to 0}\frac{(f\circ c)(t_0+h)-(f\circ c)(t_0)}{h}$$

$$\left(\begin{array}{c} \shortparallel \\ (f\circ c)'(t_0)\end{array}\right)$$

は well-defined であり,

また $\dot{c}(t_0)\in T_{c(t_0)}M$ となる.

Fact 12.4 : $p \in M$, $y \in T_pM$ を固定する.

(証明後まわし) このとき $^\exists \varepsilon > 0$, $^\exists c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$: C^∞-級曲線

s.t. $\dot{c}(0) = y$

特に

$$T_pM = \left\{ \dot{c}(0) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varepsilon > 0 \\ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : C^\infty\text{-級曲線} \\ c(0) = p \end{array} \right\}$$

以下，　$n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M_k = (M_k, \mathcal{A}_k)$: n_k 次元 C^∞-級多様体　$(k=1,2)$

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞-級写像　を fix

Theorem 12.5 : $-\infty \leq a < t_0 < b \leq \infty$ とする．

C^∞-級曲線 : $c : (a,b) \to M_1$ について，$p = c(t_0)$ とおくと，

$$(d\varphi)_p(\dot{c}(t_0)) = (\varphi \overset{\bullet}{\circ} c)(t_0)$$

Thm 11.3 より C^∞-級

◎ 正則部分多様体

設定：$n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$S \subset \mathbb{R}^{n+k}$ with 条件 Ⓡ を fix

Ⓡ $\forall p \in S,\ \exists (O, U, u) \in LC(S; \mathbb{R}^n)$

s.t. $p \in O$ かつ (O, U, u) は $\mathbb{R}^{n+k}$ 内で正則

Prop 12.6 $\mathcal{A}_S^{\mathbb{R}^{n+k}} := \{ (O, U, u) \in LC(S; \mathbb{R}^n) \mid (O, U, u)$ は $\mathbb{R}^{n+k}$ 内で正則 $\}$

は S 上の n 次元 C^∞-atlas

(Hint：Thm 8.6 を用いよ.)

Def 12.7 $\mathcal{S} = (S, [\mathcal{A}_S^{\mathbb{R}^{n+k}}])$

$\mathbb{R}^{n+k}$のn次元正則部分多様体という

(または単にn次元部分多様体)

Rem: "$n+k$次元C^∞-級多様体Mのn次元正則部分多様体"も"ほぼ同様"に定義できる.

Ex 12.8 Ex 9.21の

$$\mathcal{S}_q = (S_q, [\mathcal{A}_0])$$

は$\mathbb{R}^{n+k}$のn次元正則部分多様体.

便利な定理

$N = (N, \mathcal{A}_N)$ を m 次元 C^∞-級多様体とする.

Fact 12.9 : $S \subset D \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k}$ となる D を fix.

($\mathbb{R}^{n+k}$, D は Prop 12.1 の意味で それぞれ $n+k$ 次元多様体とみなす)

(i) $\tilde{\varphi} : D \to N$: C^∞-級写像とする.

このとき $\varphi := \tilde{\varphi}|_S : S \to N$ も C^∞-級写像

(ii) $\phi : N \to \mathbb{R}^{n+k}$: C^∞-級写像 with $\phi(N) \subset S$

このとき $\phi : N \to S$, $x \mapsto \phi(x)$ も C^∞-級写像

特徴付け **Fact 12.10**: 包含写像 $\iota : S \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ は C^∞-級で

$\forall p \in S$, $(d\iota)_p : T_pS \to T_p\mathbb{R}^{n+k}$ は単射

特に $T_pS \subset T_p\mathbb{R}^{n+k}$ とみなせる.

Fact 12.11

$$\begin{cases} Q \subset \mathbb{R}^{n+k} \\ \mathcal{A} : \text{極大 } n \text{ 次元 } C^\infty\text{-atlas on } Q \end{cases}$$ を fix

仮定: $\begin{cases} \text{包含写像 } \iota : Q \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k} \text{ が } C^\infty\text{-級 かつ} \\ \forall q \in Q,\ (d\iota)_q : T_qQ \to T_q\mathbb{R}^{n+k} \text{ は単射} \end{cases}$

を満たすとする. このとき Q は条件 Ⓡ を満たし, $\mathcal{A} = [\mathcal{A}_Q^{\mathbb{R}^{n+k}}]$

3ページ前の

Ex 12.12

$S^2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{k=1}^{3} x_k^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^3$ を Ex 9.20 の意味で

2次元 C^∞-級多様体とみなす.

このとき S^2 は $\mathbb{R}^3$ の正則部分多様体となる.

$p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \in S^2$ とする.

$T_p S^2 \subset T_p \mathbb{R}^3 = \{ \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mid a_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, 3) \}$

とみなす

(Fact 12.10)

Claim : $T_pS^2 = \{ \sum_{i=1}^{3} a_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p \in T_p\mathbb{R}^3 \mid a_1 + a_2 = 0 \}$ $(\subset T_p\mathbb{R}^3)$

$W := \{ \sum_{i=1}^{3} a_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p \mid a_1 + a_2 = 0 \}$ とおく.

示すこと "$\supset$" と "$\subset$"

"$\supset$" を示す : T_pS^2 は線型部分空間 in $T_p\mathbb{R}^3$ なので,

Prop 12.3 と Thm 12.5 より 以下を示せば了/合

(示) $^\exists c_\alpha, c_\beta : \mathbb{R} \to S^2 : C^\infty$-級曲線

s.t. $c_\alpha(0) = p$, $c_\beta(0) = p$, $\{ \dot{c}_\alpha(0), \dot{c}_\beta(0) \}$ は W の基底.

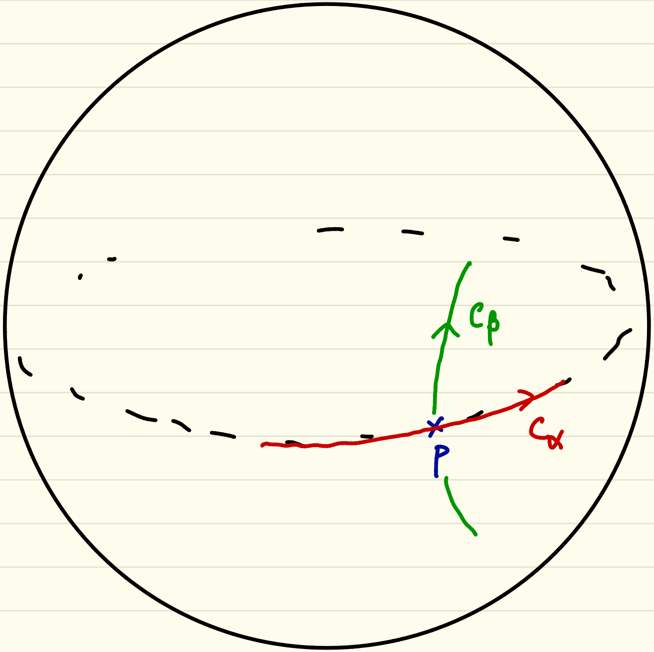
($T_pS^2 \subset T_p\mathbb{R}^3$ は Fact 12.10 の意味であることに注意)

以下のLemmaよりOK

Lemma 12.13

$$\begin{cases} c_\alpha : \mathbb{R} \to S^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & \\ \sin t & \cos t & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ c_\beta : \mathbb{R} \to S^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & & -\sin t \\ & 1 & \\ \sin t & & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \qquad \text{は } S^2 \text{ 内の } C^\infty\text{-級曲線で} \\ c_\alpha(0) = c_\beta(0) = p, \quad \underset{\substack{\shortparallel \\ ((\iota \circ c_\alpha)\dot{}(0))}}{\dot{c}_\alpha(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p - \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p\right), \quad \dot{c}_\beta(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_p \end{cases}$$

(Hint: Fact 12.9, Prop 5.19, Thm 12.5 を用いよ)



c_β
c_α
p

"C" を示す：Fact 12.4 より 以下を示せば十分

㊡ $^\forall c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^2$: C^ω 級曲線 with $c(0) = p$,

$\dot{c}(0) \in W$

$^\forall c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^2$: C^ω 級曲線 with $c(0) = p$ をとる.

㊡ $\dot{c}(0) \in W$

ここで

$c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t)) \quad (t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$ と書く.

Prop 5.11 より $\dot{c}(0) = c_1'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + c_2'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p + c_3'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_p$ となるので, 以下を示せば OK

示) $c_1'(0) + c_2'(0) = 0$

いま $c(0) = p$ より $c_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ c_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ c_3(0) = 0.$

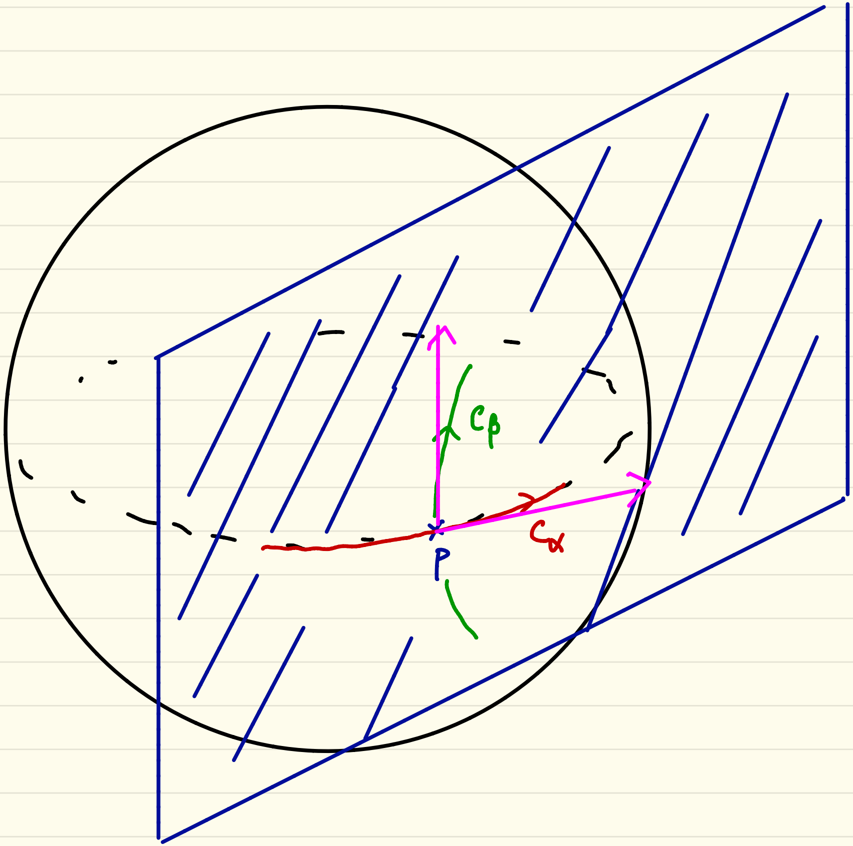
また $c(t) \in S^2 \ (\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$ より

$$c_1(t)^2 + c_2(t)^2 + c_3(t)^2 = 1 \qquad (\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

両辺を $t=0$ で微分すると

$$2\underbrace{c_1(0)}_{=1/\sqrt{2}}c_1'(0) + 2\underbrace{c_2(0)}_{=1/\sqrt{2}}c_2'(0) + 2\underbrace{c_3(0)}_{=0}c_3'(0) = 0$$

特に $c_1'(0) + c_2'(0) = 0$ ∎



$W = T_p S^2$

p における S^2 の接平面

Ex 12.15: 写像 $\varphi : S^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (x_1, x_1 x_2)$ とおく.

このとき φ は C^∞-級写像 (Hint: Fact 12.9 を用いよ)

$p = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \in S^2$ とおく. このとき $\varphi(p) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$

$(d\varphi)_p : T_p S^2 \to T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^2$ を求めよう.

Ex 12.13 より $T_p S^2 = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \;\middle|\; a_1 + a_2 = 0 \right\} \subset T_p \mathbb{R}^3$

また $T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^2 = \left\{ \sum_{j=1}^{2} b_j \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{\varphi(p)} \;\middle|\; b_1, b_2 \in \mathbb{R} \right\}$ とおく.

(ただし

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{\varphi(p)} : C^\infty(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(\varphi(p) + h e_j) - f(\varphi(p))}{h}$$

)

ここで Lemma 12.13 より

$$\dot{c}_\alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p - \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p\right)$$

$$\dot{c}_\beta(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_p$$

は T_pS^2 の基底

特に $(d\varphi)_p(\dot{c}_\alpha(0))$, $(d\varphi)_p(\dot{c}_\beta(0)) \in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^2$ を求めれば

線型写像 $(d\varphi)_p : T_pS^2 \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^2$ が決定できる.

Thm 12.5 より

$$(d\varphi)_p(\dot{c}_\alpha(0)) = (\varphi\circ c_\alpha)^{\bullet}(0)$$

$$(d\varphi)_p(\dot{c}_\beta(0)) = (\varphi\circ c_\beta)^{\bullet}(0)$$ である。

ここに

$$\varphi\circ c_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\right)$$

$$\varphi\circ c_\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ \frac{1}{2}\cos t\right)$$ となる。

特に Prop 5.19 より

$$\dot{(\varphi \circ c_\alpha)}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)}$$

$$\dot{(\varphi \circ c_\beta)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{\varphi(p)}$$

まとめると

$$(d\varphi)_p(\dot{c}_\alpha(0)) = (d\varphi)_p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p - \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)}$$

$$(d\varphi)_p(\dot{c}_\beta(0)) = (d\varphi)_p\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_p\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{\varphi(p)}$$

これより例えば $\quad y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p - \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_p \in T_pS^2$ について

$$(d\varphi)_p(y) = (d\varphi)_p\left(\sqrt{2}\,\dot{c}_\alpha(0) - \sqrt{2}\,\dot{c}_\beta(0)\right)$$

$$= \sqrt{2}\,(d\varphi)_p(\dot{c}_\alpha(0)) - \sqrt{2}\,(d\varphi)_p(\dot{c}_\beta(0))$$

($\because$ $(d\varphi)_p$ の線型性)

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)}\right) - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{\varphi(p)}\right)$$

$$= -2\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_p$$

などの計算ができる.

またこのとき $\operatorname{rank}(d\varphi)_p = 2$ となること等も分かる.