§13 隆起関数とその応用

内容
- 関数の台
- $\mathbb{R}^n$ 上の隆起関数
- 開部分多様体上の C^∞ 級関数の延長
- 応用

§13の主結果

M : C^∞-級多様体

$p \in \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ を fix

このとき

$^\forall f \in C^\infty(\Omega)$, $^\exists \tilde{f} \in C^\infty(M)$

s.t. $\begin{cases} \tilde{f} \text{ は } p \text{ のまわりで } f \text{ と一致} \\ \tilde{f} \text{ は } \Omega \text{ の外でゼロ} \end{cases}$

応用 : ① $n \geq 1$ のとき $\dim C^\infty(M) = \infty$

② $^\forall p \in M$, $\dim T_pM = n$

◎ 関数の台

設定：
$$\begin{cases} X : \text{位相空間} \\ f : X \to \mathbb{R} : X\text{上の関数} \end{cases}$$
をfix

Def 13.1

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}} \quad (\subset X)$$

Xにおける閉包

をfの台（support）とよぶ

◎ $\mathbb{R}^n$ 上の隆起関数

Def 13.2 : $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ が $\mathbb{R}^n$ 上の隆起関数 (bump function)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^n$ が compact

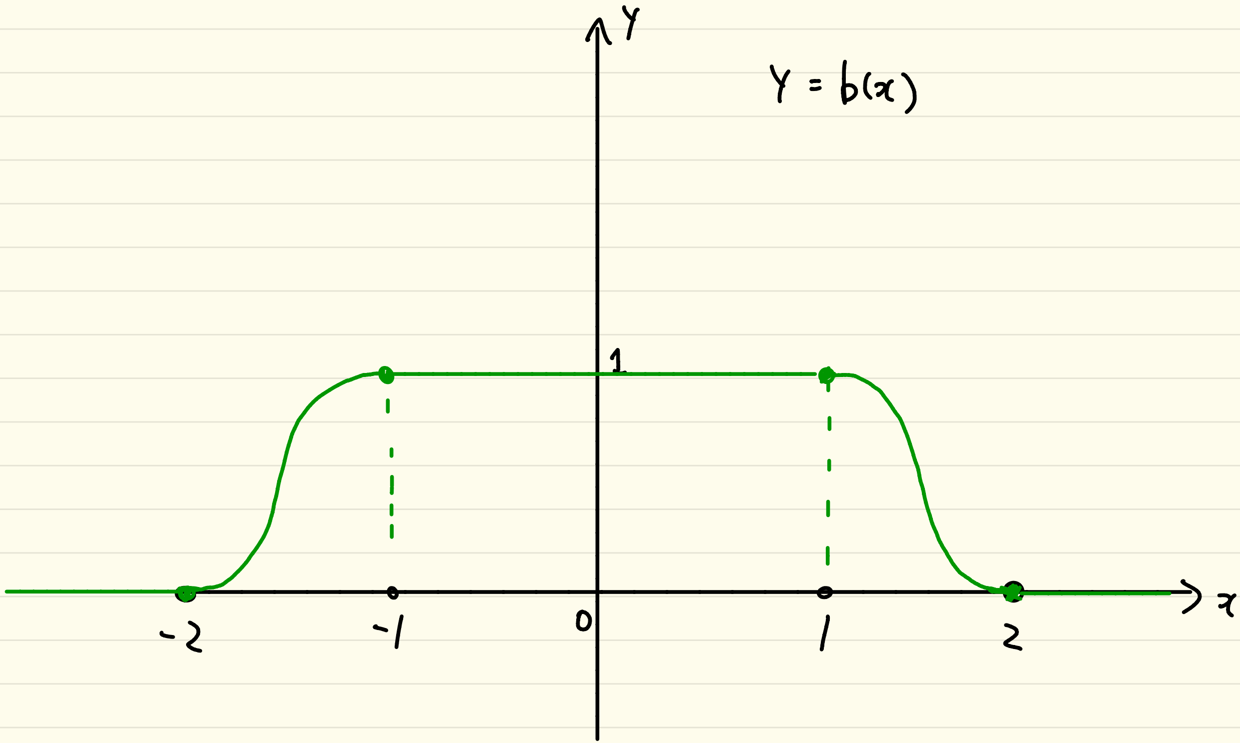
Theorem 13.3 $\mathbb{R}^n$ 上の隆起関数 $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ であって以下の (i), (ii) を満たすものが存在する.

(i) $b(x) = 1 \quad {}^\forall x \in \mathbb{R}^n$ with $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq 1$

(ii) $b(x) = 0 \quad {}^\forall x \in \mathbb{R}^n$ with $\|x\| \geq 2$

(Remark : $\mathbb{C}$ 上の正則関数 f が "$\operatorname{supp} f$ は compact" を満たすならば $f \equiv 0$ (Liouville の定理))

$n=1$ の場合のイメージ



Thm 13.3 の証明の Hint:

Recall: $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & (t > 0) \\ 0 & (t \leqq 0) \end{cases}$

は $\mathbb{R}$ 上 C^∞-級

$$b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \frac{\rho(2 - \|x\|)}{\rho(\|x\| - 1) + \rho(2 - \|x\|)}$$

とおけば OK.

@ 開部分多様体上の C^∞-級関数の延長

設定: $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M = (M, \mathcal{A})$: n次元 C^∞-級多様体

$\emptyset \neq \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$

を fix

Prop 13.4 (i) ${}^\forall (O, U, \pi) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ with $O \cap \Omega \neq \emptyset$,

$(O \cap \Omega, \pi(O \cap U), \pi|_{O \cap U}) \in \mathcal{LC}(\Omega; \mathbb{R}^n)$

(ii) $\mathcal{A}_\Omega := \{ (O \cap \Omega, \pi(O \cap U), \pi|_{O \cap U}) \in \mathcal{LC}(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid (O, U, \pi) \in \mathcal{A}$ with $O \cap \Omega \neq \emptyset \}$

は Ω 上の極大 C^∞-atlas

(iii) $\mathcal{A}_\Omega \subset \mathcal{A}$.

Def 13.5 : $\Omega = (\Omega, \mathcal{A}_\Omega)$ を

M の開部分多様体 (open submanifold)

という

$$C^\infty(\Omega) := C^\infty(\Omega; \mathcal{A}_\Omega)$$ について考える.

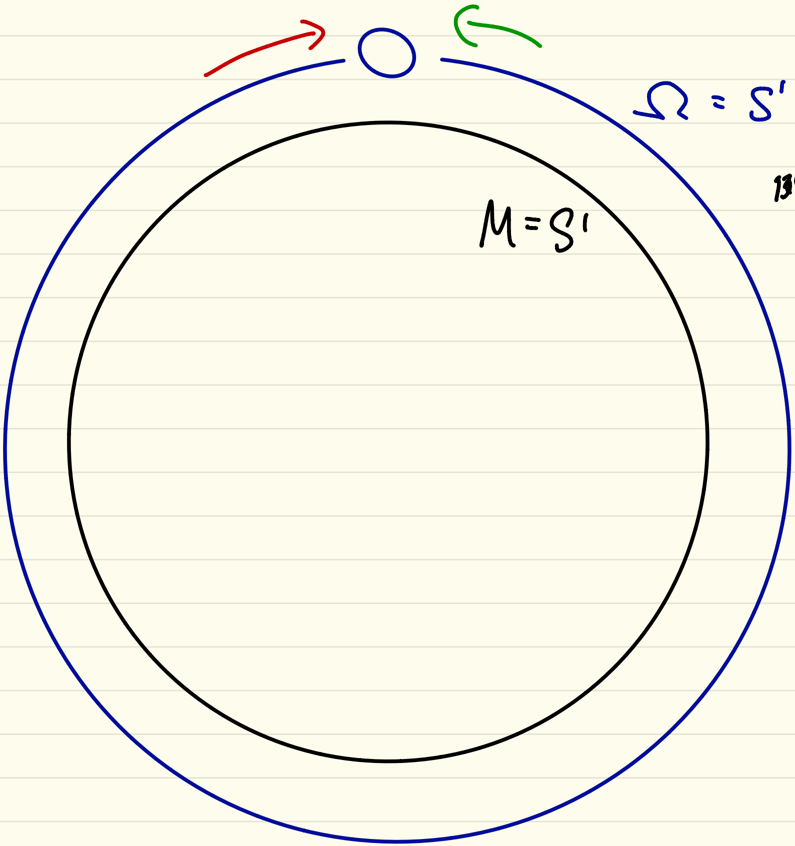
Prop 13.6 : ${}^\forall f \in C^\infty(M)$, $f|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$

(Hint : 定義に戻る)

Q : $h \in C^\infty(\Omega)$ について $f \in C^\infty(M)$ s.t. $f|_\Omega = h$

は存在する ?

A : 一般には存在するとは限らない!



$\Omega = S^1 \setminus \{1点\} \approx \mathbb{R}$

例えば

$h \in C^\infty(\Omega)$ を

$h : \Omega \to \mathbb{R}$

$(x_1, x_2) \mapsto \dfrac{x_1}{1-x_2}$

とすると，

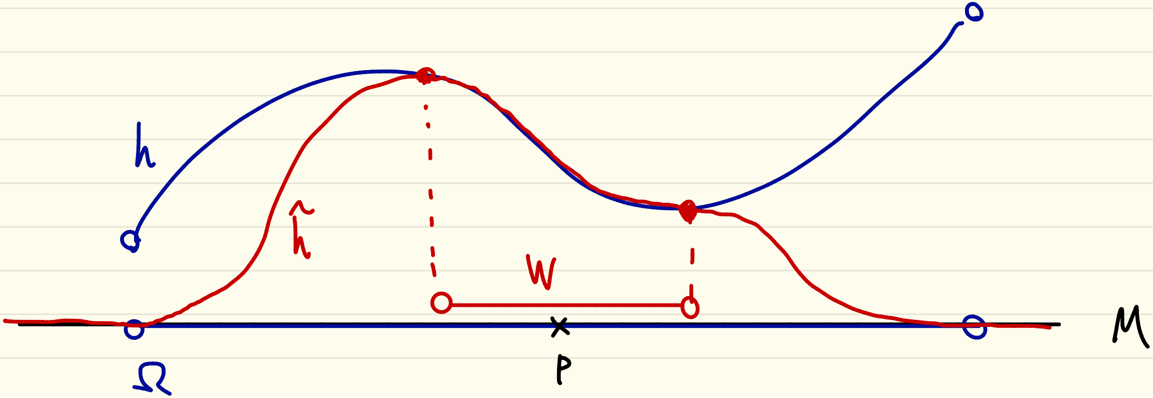
h は M 上の C^∞-級関数に

拡張できない

Theorem 13.7 : $p_0 \in \Omega$ を fix　(M がハウスドルフであることを用いる!)

このとき $^\exists W \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$ with $p_0 \in W$ s.t.

$$\left({}^\forall h \in C^\infty(\Omega),\ {}^\exists \tilde{h} \in C^\infty(M) \text{ s.t. } \begin{cases} \tilde{h}|_W \equiv h|_W \\ \tilde{h}|_{M \setminus \Omega} \equiv 0 \end{cases} \right.$$



Thm 13.7 の証明：

$n=0$ の場合は $C^\infty(M) = \mathrm{Map}(M;\mathbb{R})$ となるため簡単

$n \geq 1$ の場合を考える。　　　　　　　　　　（略）

以下の 2つの Lemma を認める。

Lemma 13.8 ： $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: M の open cover を fix

$f : M \to \mathbb{R}$ について以下は同値

(i) $f \in C^\infty(M)$

$\Updownarrow$

(ii) $f|_{O_\lambda} \in C^\infty(O_\lambda)$ $({}^\forall \lambda \in \Lambda)$

Lemma 13.9 ： 定数関数の C^∞-級関数

L

示 $^\exists W \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$ with $p \in W$ s.t. ...

Prop 9.15 より $(O, U, x) \in \mathcal{A}_\Omega$ s.t. $\begin{cases} x(p) = 0 \\ U = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 3 \} \end{cases}$

となるものがとれる.

$W := x^{-1}(\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \}) \subset O$ とおくと,

定義より $p \in W$ かつ $W \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$.

示 $^\forall h \in C^\infty(\Omega)$, $^\exists \tilde{h} \in C^\infty(M)$ s.t. ...

$^\forall h \in C^\infty(\Omega)$ をとる.

(示) $\exists \tilde{h} \in C^\infty(M)$ s.t. $\tilde{h}|_W \equiv h|_W$ かつ $\tilde{h}|_{M \setminus \Omega} \equiv 0$

$\mathbb{R}^n$ 上の隆起関数 $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ であって
以下の (i), (ii) を満たすものを1つ fix （Thm 13.3 から そのような b は存在する）

(i) $b(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ with $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq 1$

(ii) $b(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ with $\|x\| \geq 2$

$$\tilde{h} : M \to \mathbb{R},\ p \mapsto \begin{cases} h(p) \cdot b(x(p)) & (\text{if } p \in O) \\ 0 & (\text{if } p \notin O) \end{cases}$$ とおく.

(示) $\underbrace{\tilde{h} \in C^\infty(M)}_{①}$ s.t. $\underbrace{\tilde{h}|_W \equiv h|_W}_{②}$ かつ $\underbrace{\tilde{h}|_{M \setminus \Omega} \equiv 0}_{③}$

②, ③ は $\tilde{h}$ の定め方から従う.

① を示す:

$$O' := M \setminus \pi^{-1}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 2\}) \text{ は } M \text{ の open set}$$

$\because$ ㊟ $\pi^{-1}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 2\})$ は closed in M.

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 2\}$ は compact

特に $\pi^{-1}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 2\})$ も compact

従って $\pi^{-1}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 2\})$ は closed in M

($\because$ M はハウスドルフ)

特に

$\{O, O'\}$ は M の open cover となる.

Lemma 13.8 より 以下を示せば十分

㊟ $\underbrace{\tilde{h}|_O \in C^\infty(O)}_{ⓐ}$, $\underbrace{\tilde{h}|_{O'} \in C^\infty(O')}_{ⓑ}$

ⓐ $\hat{h}|_O \in C^\infty(O)$ を示そう.

以下を示せば十分

㊟ $(\hat{h}|_O)\circ x^{-1} \in C^\infty(U)$

ここで $\hat{h}$ の定義より $\hat{h}|_O \circ x^{-1} = \underbrace{(h\circ x^{-1})}_{\in C^\infty(U)} \cdot \underbrace{(b|_U)}_{\in C^\infty(U)} : U \to \mathbb{R}$

これより $(\hat{h}|_O)\circ x^{-1} \in C^\infty(U)$.

ⓑ $\hat{h}|_{O'} \in C^\infty(O')$ を示そう.

$\hat{h}$ の定義から $\hat{h}|_{O'} \equiv 0$ on O'.

特に Lemma 3.19 より $\hat{h}|_{O'} \in C^\infty(O')$

∎

◎ Thm 13.7 の応用①

設定: $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$M = (M, \mathcal{A})$: n次元 C^∞-級多様体 を fix

Theorem 13.10: $\dim C^\infty(M) = \infty$

Hint: $(O, U, x) \in \mathcal{A}$, $p_0 \in O$ を fix

各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $g_k : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1^k$ とおく ($n \geq 1$ に注意)

Claim ① $^\exists W \underset{\text{open}}{\subset} O$ with $p_0 \in W$, $^\exists \{f_k \in C^\infty(M)\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ s.t. $f_k|_W = g_k|_W$

② $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は一次独立 in $C^\infty(M)$

① は Thm 13.7, ② は Thm 2.13 と以下の Lemma より従う.

Lemma 13.11 $C^\infty(M) \to C^\infty(W)$, $f \mapsto f|_W$ は線型写像

◎ Thm 13.7 の応用②

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M = (M, \mathcal{A})$: n 次元 C^∞-級多様体

$p \in M$ を fix

Theorem 13.11 （接ベクトルの局所性）

$v \in T_pM$ を fix

$f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ が以下を満たすとする.

"$^\exists O \underset{\text{open}}{\subset} M$ with $p \in O$ & $f_1|_O = f_2|_O$"

このとき $v(f_1) = v(f_2)$ in $\mathbb{R}$

Thm 13.11 の証明：

示 $g(f_1) = g(f_2)$

$f_0 = f_1 - f_2 \in C^\infty(M)$ とおく.

g の線型性より 以下を示せば十分.

示 $g(f_0) = 0$

まず以下を示そう

Claim : $\exists h \in C^\infty(M)$ s.t. $h(p) = 0$ かつ $f_0 = f_0 \cdot h$ in $C^\infty(M)$

いま $O \underset{\text{open}}{\subset} M$ s.t. $p \in O$ & $f_0|_O \equiv 0$ となる O がとれる.

すでに Thm 13.7 より $W \underset{\text{open}}{\subset} O$ with $p \in W$, $\tilde{1}_O \in C^\infty(M)$ であって

$\tilde{1}_O|_W \equiv 1_W$ かつ $\tilde{1}_O|_{M \setminus O} \equiv 0$ となるものがとれる.

ここで $h := 1_M - \tilde{1}_O \in C^\infty(M)$ とおく.

このとき $h|_W = (1_M - \tilde{1}_O)|_W \equiv 0$

$h|_{M \setminus O} = (1_M - \tilde{1}_O)|_{M \setminus O} \equiv 1_{M \setminus O}$ となることから

$f_0 = f_0 \cdot h$ in $C^\infty(M)$ である. (claim 証明終わり)

定理の証明に戻る.

示 $g(f_0) = 0$

ここで $h \in C^\infty(M)$ s.t. $h(p) = 0$ かつ $f_0 = f_0 \cdot h$ となる h を fix する.

このとき $g(f_0) = g(f_0 \cdot h)$

$= g(f_0) \cdot \underbrace{h(p)}_{=0} + \underbrace{f_0(p)}_{=0}\, g(h)$ $\left(\because p \text{ におけるライプニッツ則}\right)$

$= 0$

□

@ Thm 13.11 の応用

設定： $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix

$M = (M, \mathcal{A})$: n 次元 C^∞-級多様体

$\emptyset \neq \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$

Prop 13.12 : 包含写像 $\iota : \Omega \hookrightarrow M$ は C^∞-級

(Hint : Prop 13.6)

Theorem 13.13 : $\forall p \in \Omega$, $(d\iota)_p : T_p\Omega \to T_pM$ は 線型同型.

(証明はすぐ後)

Cor 13.14 $(\mathcal{O}, U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $p \in \mathcal{O}$ を fix

このとき $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right\}_{j=1,\cdots,n}$ は T_pM の基底

Hint : Case 1 : U が 凸 in $\mathbb{R}^n$ の場合

Thm 13.13 & Thm 3.6 から示される.

Case 2 : U が 凸 in $\mathbb{R}^n$ でない場合

$\emptyset \neq \mathcal{O}_0 \underset{\text{open}}{\subset} \mathcal{O}$ を $\varphi(\mathcal{O}_0)$: 凸 in $\mathbb{R}^n$ となるようにとる.

このとき $T_pM \simeq T_p\mathcal{O} \simeq T_p\mathcal{O}_0$ として Case 1 に reduce

Thm 13.13

Remark : Fact 12.14 は Cor 13.14 から従う.

Thm 13.13 の証明 : $^\forall p \in \Omega$ を fix.

示) ① $(d\iota)_p : T_p\Omega \to T_pM$ は単射

② 〜〜〜 は全射

① を示す. $(d\iota)_p$ の線型性から以下を示せば十分

示) $^\forall \eta \in T_p\Omega$ with $(d\iota)_p(\eta) = 0$, $\eta = 0$.

$^\forall \eta \in T_p\Omega$ with $(d\iota)_p(\eta) = 0$ をとる.

示) $\eta = 0$ i.e. $^\forall h \in C^\infty(\Omega)$, $\eta(h) = 0$.

$^\forall h \in C^\infty(\Omega)$ をとる.

示) $\eta(h) = 0$.

Thm 13.7 より $W \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$ with $p \in W$, $\tilde{h} \in C^\infty(M)$ s.t.

$\tilde{h}|_W = h|_W$ となる $W, \tilde{h}$ がとれる.

このとき $h_1 := \tilde{h}|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$ ($\because$ Prop 13.6) とおくと

$h_1|_W = h|_W$ となるため

Thm 13.11 より $g(h_1) = g(h)$ である.

従って以下を示せばよい

(示) $g(h_1) = 0$

いま $h_1 = \tilde{h}|_\Omega = \tilde{h} \circ \iota$ より

$$g(h_1) = g(\tilde{h} \circ \iota) = (\underbrace{(d\iota)_p(g)}_{=0\ (\because\ g\text{ の仮定})})(\tilde{h}) = 0.$$

① が示された.

② を示す： 示 $\forall y \in T_pM$, $\exists \xi \in T_p\Omega$ s.t. $(dz)_p(\xi) = y$.

$\forall y \in T_pM$ をとる.

示 $\exists \xi \in T_p\Omega$ s.t. $(dz)_p(\xi) = y$

Thm 13.7 より $W \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$ with $p \in W$

s.t. $\left(\forall h \in C^\infty(\Omega), \exists \hat{h} \in C^\infty(M) \text{ s.t. } \hat{h}|_W \equiv h|_W \right)$

となる W をとる.

各 $h \in C^\infty(\Omega)$ について $\hat{h} \in C^\infty(M)$ を

$\hat{h}|_W \equiv h|_W$ となるように選んでおく.

このとき $\zeta : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$
$h \mapsto g(\tilde{h})$ と定める.

示) $\zeta \in T_p\Omega$ かつ $(dz)_p(\zeta) = g$

i.e. ⓐ $\zeta : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ は線型

ⓑ ζ は p におけるライプニッツ則を満たす.

ⓒ $(dz)_p(\zeta) = g$

ⓐを示す: ${}^\forall h_1, h_2 \in C^\infty(\Omega)$, ${}^\forall h \in C^\infty(\Omega)$, ${}^\forall \lambda \in \mathbb{R}$ をとる.

示) $\zeta(h_1 + h_2) = \zeta(h_1) + \zeta(h_2)$

$\zeta(\lambda h) = \lambda \zeta(h)$

ここで $\widetilde{(h_1+h_2)}\big|_W \equiv (\tilde{h}_1+\tilde{h}_2)\big|_W$ on W に注意すると

$$
\begin{aligned}
\zeta(h_1+h_2) &= g(\widetilde{h_1+h_2}) \\
&= g(\tilde{h}_1+\tilde{h}_2) \qquad (\because \text{Thm } 13.11) \\
&= g(\tilde{h}_1)+g(\tilde{h}_2) \qquad (\because g \text{ の線型性}) \\
&= \zeta(h_1)+\zeta(h_2)
\end{aligned}
$$

また $\widetilde{\lambda h}\big|_W \equiv (\lambda\cdot\tilde{h})\big|_W$ on W に注意すると

$$
\zeta(\lambda h) = g(\widetilde{\lambda h}) \underset{(\text{Thm } 13.11)}{=} g(\lambda\cdot\tilde{h}) = \lambda\cdot g(\tilde{h}) = \lambda\cdot\zeta(h)
$$

これで ⓐ がいえた。

ⓑを示す： $^\forall h_1, h_2 \in C^\infty(\Omega)$ をとる.

示 $\zeta(h_1 \cdot h_2) = \zeta(h_1)\cdot h_2(p) + h_1(p)\cdot \zeta(h_2)$

ここで $\left.\widetilde{(h_1 \cdot h_2)}\right|_W \equiv (\tilde{h}_1 \cdot \tilde{h}_2)_W$ on W に注意すると

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} = \zeta(h_1 \cdot h_2) &= \mathcal{J}(\widetilde{h_1 \cdot h_2}) \\
&= \mathcal{J}(\tilde{h}_1 \cdot \tilde{h}_2) \quad (\because \text{Thm } 13.11) \\
&= \mathcal{J}(\tilde{h}_1)\cdot \tilde{h}_2(p) + \tilde{h}_1(p)\cdot \mathcal{J}(\tilde{h}_2) \\
&\qquad \left(\because p \text{ におけるライプニッツ則}\right) \\
&= \zeta(h_1)\cdot h_2(p) + h_1(p)\cdot \zeta(h_2) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

これでⓑが示せた.

ⓒ を示す： $\forall f \in C^\infty(M)$ をとる.

㊟ $((d\iota)_p(\zeta))(f) = \eta(f)$

ここで $h_f = f \circ \iota \in C^\infty(\Omega)$ とおく.

このとき $\tilde{h}_f|_W = f|_W$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= ((d\iota)_p(\zeta))(f) \\
&= \zeta(f \circ \iota) \\
&= \zeta(h_f) \\
&= \eta(\tilde{h}_f) \\
&= \eta(f) \quad (\because \text{Thm } 13.11) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

これでⓒが示された ■.