§14 重要命題の紹介

内容
- ベクトル場について
- C^∞-級写像について
- 写像の微分について

(§12 の Fact たちは今回紹介する定理を使うと証明できる)

◎ ベクトル場について

設定: $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

└ M : n 次元 C^∞-級多様体

記号: $\mathfrak{X}^\infty(M) := \{ X : C^\infty(M) \to C^\infty(M) \mid X$ は C^∞-級ベクトル場 on $M \}$

└ $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, $p \in M$ について
$$X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto (Xf)(p)$$
$(\leadsto X_p \in T_pM)$

Prop 14.1 $\emptyset \neq \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ を fix.

各 $p \in \Omega$ について T_pM と $T_p\Omega$ を同一視する. (Thm 13.13)

このとき 各 $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ について

$$
\begin{aligned}
X_\Omega : C^\infty(\Omega) &\to C^\infty(\Omega) \\
h &\mapsto X_\Omega h : \Omega \to \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad p \mapsto \underbrace{X_p}_{\in T_p\Omega \text{ とみなす}} h
\end{aligned}
$$

は well-defined で $X_\Omega \in \mathfrak{X}^\infty(\Omega)$

M 上のベクトル場から Ω 上のベクトル場が得られる.

Prop 14.2 $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: M 上 a open cover with $\Omega_\lambda \neq \emptyset$ $({}^\forall\lambda\in\Lambda)$ を fix.

各 $\lambda\in\Lambda$ について $X_\lambda \in \mathfrak{X}^\infty(\Omega_\lambda)$ を fix.

以下を満たすとする.

${}^\forall\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ with $\Omega_{\lambda_1}\cap\Omega_{\lambda_2} \neq \emptyset$,

${}^\forall p \in \Omega_{\lambda_1}\cap\Omega_{\lambda_2}$, $\underbrace{(X_{\lambda_1})_p}_{} = \underbrace{(X_{\lambda_2})_p}_{}$ (貼り合わせ条件)

T_pM の元とみる

このとき

$$\begin{aligned} X : C^\infty(M) &\to C^\infty(M) \\ f &\mapsto Xf : M \to \mathbb{R} \\ &\qquad\quad p \mapsto (X_\lambda)_p f \quad \text{if } p\in\Omega_\lambda \end{aligned}$$

は well-defined で $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$

開被覆でベクトル場を貼り合わせて M 上のベクトル場を作ることもできる.

Cor 14.3 $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ を C^∞-atlas on M とする.

$\mathcal{A}_0 = \{(O_\lambda, U_\lambda, x^\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$

各 $\lambda \in \Lambda$ について $h_1^\lambda, \cdots, h_n^\lambda \in C^\infty(U_\lambda)$ を fix.

以下を満たすとする.

$^\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ with $O_{\lambda_1} \cap O_{\lambda_2} \neq \emptyset$,

$^\forall p \in O_{\lambda_1} \cap O_{\lambda_2}$,

$$\sum_i h_i^{\lambda_1}(x^{\lambda_1}(p)) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\lambda_1}}\right)_p = \sum_j h_j^{\lambda_2}(x^{\lambda_2}(p)) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\lambda_2}}\right)_p \quad \text{in } T_pM$$

このとき

$$\begin{aligned} X : C^\infty(M) &\to C^\infty(M) \\ f &\mapsto Xf : M \to \mathbb{R} \\ &\qquad p \mapsto \sum_i h_i^\lambda(x^\lambda(p)) \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)_p f \right) \text{ if } p \in O_\lambda \end{aligned}$$

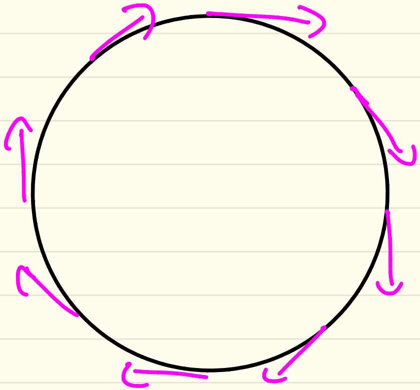
は well-defined で $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$

Cor 14.3 を用いれば、ベクトル場を具体的に構成できる.

問: S^1 上の C^∞-級ベクトル場 X であって

$$\forall p \in S^1, \quad X_p \neq 0$$

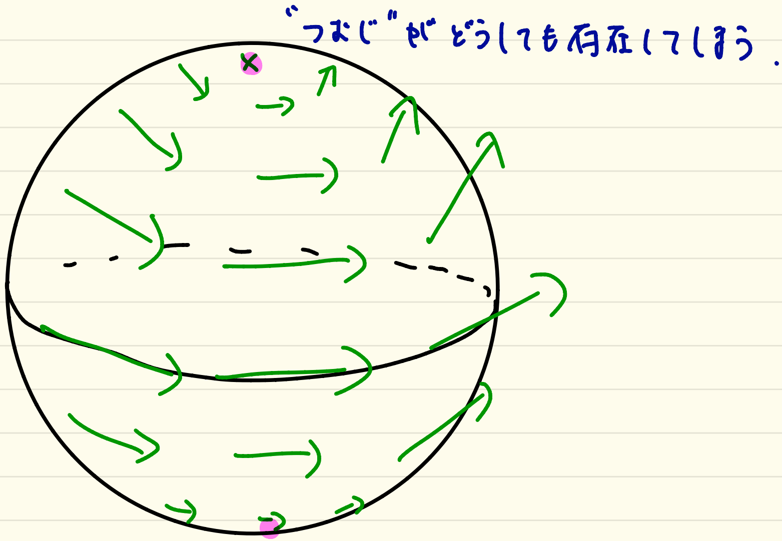
となるものを一つ構成せよ.



Fact (Hairy ball theorem : 不動点定理の一種)

S^2 上の C^∞-級ベクトル場 X であって、

"$\forall p \in S^2,\ X_p \neq 0$" を満たすものは存在しない



◎ C^∞-級写像について

設定：$M_1 = (M_1, \mathcal{A}_1)$: n_1次元 C^∞-級多様体

$M_2 = (M_2, \mathcal{A}_2)$: n_2次元 C^∞-級多様体 を fix.

Thm 14.4: 写像 $\varphi: M_1 \to M_2$ について 以下は同値

(i) φ は C^∞-級写像 $\left(\forall f \in C^\infty(M_2),\ \varphi^*(f) \in C^\infty(M_1)\right)$

$\Updownarrow$ $\Uparrow$ Thm 11.4

(ii) ${}^\forall p \in M_1,\ {}^\exists (O, U, \pi) \in A_1,\ {}^\exists (O', V, \psi) \in A_2$ s.t.

U open $\subset \mathbb{R}^{n_1}$, V open $\subset \mathbb{R}^{n_2}$

$p \in O \cap \varphi^{-1}(O')$ かつ $\varphi_{\pi\psi}: \pi(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V$ は C^∞-級

$x \longmapsto \psi(\varphi(\pi^{-1}(x)))$

$\Updownarrow$ easy $\Uparrow$

(iii) ${}^\forall (O, U, \pi) \in A_1,\ {}^\forall (O', V, \psi) \in A_2$ with $O \cap \varphi^{-1}(O') \neq \emptyset$

$\varphi_{\pi\psi}: \pi(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V$ は C^∞-級

(Hint: (i) $\Rightarrow$ (iii) の証明に Thm 13.7 を用いよ)

Cor 14.5: C^∞-級写像は連続

◎ 写像の微分について

設定: $\overset{n_1\text{次元}}{M_1} = (M_1, A_1)$, $\overset{n_2\text{次元}}{M_2} = (M_2, A_2)$: C^∞-級多様体

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞-級写像

$p \in M_1$,

$(O, U, x) \in A_1$ with $p \in O$

$(O', V, y) \in A_2$ with $\varphi(p) \in O'$　を fix

記号: $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p : C^\infty(M_1) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{x(p)} \Big(\overbrace{f \circ x^{-1}}^{\in\, C^\infty(U)} \Big)$

$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)} : C^\infty(M_2) \to \mathbb{R}$, $h \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{y(\varphi(p))} \Big(\underbrace{h \circ y^{-1}}_{\in\, C^\infty(V)} \Big)$

Theorem 14.5

$$(d\varphi)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \sum_{i=1}^{n_2} (J\varphi_{xy})_{x(p)} \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p$$

Cor 14.6

$(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ を

T_pM_1 の基底 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right\}_j$

$T_{\varphi(p)}M_2$ の基底 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)}\right\}_i$ について

行列表示すると $(J\varphi_{xy})_{x(p)}$ となる.

$(J\varphi_{xy})_{x(p)}$ に $(d\varphi)_p$ のすべての情報が詰まっている.

設定： M_1, M_2 ： C^∞-級多様体

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞-級写像 を fix

Theorem 14.7 (逆写像定理)

(i) $p \in M_1$ を fix. $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ が線型同型写像のとき,

φ は p のまわりで局所微分同相.

i.e. $^\exists U$: p の開近傍, $^\exists V$: $\varphi(p)$ の開近傍

s.t. $\varphi(U) = V$ かつ $\varphi|_U : U \to V$ は C^∞-diffeo.

(ii) $\varphi : M_1 \to M_2$ が全単射かつ

$^\forall p \in M_1$ について $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ が線型同型写像のとき,

逆写像 $\varphi^{-1} : M_2 \to M_1$ は C^∞-級.

特に $\varphi : M_1 \to M_2$ は C^∞-diffeo.

(具体的に φ^{-1} を求めるのが難しい場合に役に立つ)