前回　§1 イントロダクション

§2 多変数 C^∞-級関数

今回　§3：方向微分の関数論的特徴付け

全体：

Part I：多変数関数の微分 ← ~~§5~~ までの予定

~~§6~~ §5

Part II：局所座標

Part III：可微分多様体

Part IV：可微分多様体の間の写像

"Part I: 多変数関数の微分" でやりたい事

$U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ について
$U \neq \emptyset$

$C^\infty(U)$ の言葉で各種概念を説明する.

方向微分(接ベクトル) (§3)
ベクトル場 (§4)
C^∞-写像
全微分(Jacobi行列) (§5)
~~陰関数定理~~

§3：方向微分の関数論的特徴付け

内容

- ◎ 方向微分の定義と性質
- ◎ 方向微分の特徴付け

◎ 方向微分の定義と性質

設定： $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix （$n=0$ の場合は $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ となるので あまり意味はない）

$\emptyset \neq U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ を fix

記号： $e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, \cdots, 0, 1)$: $\mathbb{R}^n$ の標準基底

$C^\infty(U) := \{ f : U \to \mathbb{R} \mid f$ は U 上 C^∞-級$\}$

← Prop 2.10, 2.14 より $\mathbb{R}$-代数となる.

Def. 3.1 $p \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$ とする.　　pを始点とするベクトルをイメージする.

各 $f \in C^\infty(U)$ について

$$v_p(f) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p+hv)-f(p)}{h} \in \mathbb{R}$$

と定める.

pにおける f の v-方向微分

Prop 3.2 Def 3.1 の設定で $v_p(f) \in \mathbb{R}$ は well-defined.

また $v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \quad (a_i \in \mathbb{R})$ とおくと

$$v_p(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)(p)$$

(重要命題であるが，解析の講義でやっているので略)

$p \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$ を固定する．　Pを始点とするベクトルをイメージする．

写像　$v_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$,　$f \mapsto v_p(f)$

について考える．

Prop. 3.3　$v_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto v_p(f)$ は線型写像

Prop. 3.3 の証明の Hint :

以下を示せばよい

① $\forall f_1, f_2 \in C^\infty(U)$,　$v_p(f_1 + f_2) = v_p(f_1) + v_p(f_2)$

関数の和　$\mathbb{R}$の和

② $\forall f \in C^\infty(U)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,　$v_p(\lambda f) = \lambda v_p(f)$

関数のスカラー倍　$\mathbb{R}$のスカラー倍

以下，演習問題とする．

Prop. 3.4 : $\forall f, g \in C^\infty(U)$,

(ライプニッツ則)

$\mathbb{R}$の積

$$v_p(\underset{\text{関数の積}}{f\cdot g}) = \underbrace{v_p(f)}_{\mathbb{R}}\cdot\underbrace{g(p)}_{\mathbb{R}} + \underbrace{f(p)}_{\mathbb{R}}\cdot\underbrace{v_p(g)}_{\mathbb{R}}$$

◎ 方向微分の特徴付け

設定： $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix

$\emptyset \neq U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ を fix

$p \in U$ を fix

Def. 3.5 ： 線型写像 $\mathcal{D} : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ が

$p\,(\in U)$ におけるライプニッツ則を満たすとは

以下を満たすこと

- $\forall f, g \in C^\infty(U)$, $\quad \mathcal{D}(f \overset{\text{関数の積}}{\cdot} g) = \underbrace{\mathcal{D}(f)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{g(p)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f(p)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\mathcal{D}(g)}_{\in \mathbb{R}}$

Question : 方向微分以外に

線型写像 $g : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ であって

ライプニッツ則を満たすものはあるか?

Answer : 実は存在しない! (Theorem 3.6 及び

その一般化)

… 方向微分は線型性とライプニッツ則で特徴付けられる.

Def 3.6 :

$T_p(U) := \{ g : C^\infty(U) \to \mathbb{R} \mid$ 線型 かつ p におけるライプニッツ則を満たす $\}$

とおく.

$T_p(U)$ を U の p における接空間と呼ぶ.

理由をこれから説明する.

Prop 3.3, 3.4 より 各 $v \in \mathbb{R}^n$ について, $v_p \in T_p(U)$.

特に $\Phi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_p(U)$

という写像を得る.

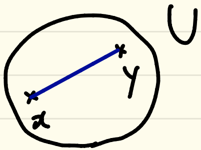
今節の主定理

Theorem 3.6: U が凸であるとする.

このとき $\Phi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_p(U)$ は線型同型

Recall: $U \subset \mathbb{R}^n$ が凸 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in U,\ \forall t \in [0,1],$

$tx + (1-t)y \in U$



Cor. 3.7: U が凸のとき,

$T_p(U)$ は有限次元ベクトル空間で $\dim T_p(U) = n$.

Remark：実はUが凸でなくても，一般に

$\Phi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_p(U)$ は線型同型であるよ.

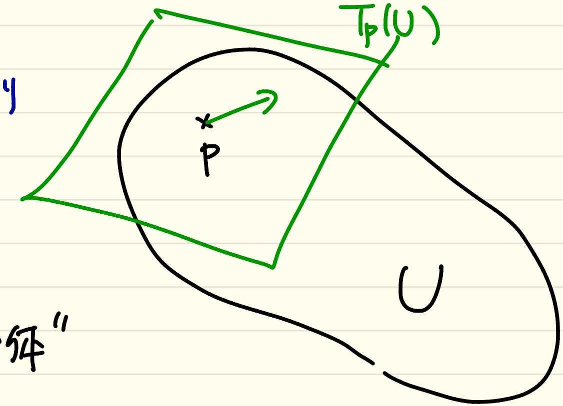
このことは多様体の定義をした後で,

より一般的な設定で証明を行う.

定理の意義: $T_p(U)$ は $C^\infty(U)$ の言葉で定義される.

同型: $\mathbb{R}^n \simeq T_p(U)$

"p を始点とする
ベクトル全体" のつもり



により $T_p(U)$ 自体を

"p から生えているベクトル全体"

と思いこむことができる.

「Thm 3.6 : U:凸とする. $\Phi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_p(U)$ は線型同型」の証明について

やる事: ① $T_p(U)$ のベクトル空間構造の確認

② $\Phi_{p,U}$ の線型性

③ $\Phi_{p,U}$ の単射性

難 ④ $\Phi_{p,U}$ の全射性 (意味: 線型写像 $\eta : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ が p におけるライプニッツ則を満たすなら η は方向微分である)

(U の凸性をここで使う)

① $T_p(U)$ のベクトル空間構造

汎関数

Def. 3.7 $g_1, g_2 : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ について

$$g_1 + g_2 : C^\infty(U) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \underbrace{g_1(f)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g_2(f)}_{\in \mathbb{R}}$$ とおく。

汎関数の和

また $g : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ について

$$\lambda g : C^\infty(U) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \lambda \cdot (\underbrace{g(f)}_{\in \mathbb{R}})$$ とおく

汎関数のスカラー倍

Prop. 3.8 $T_p(U)$ は Def 3.7 の和とスカラー倍について
ベクトル空間となる.

Prop. 3.8 の証明の Hint:

Lemma 3.9 $\mathrm{Hom}(C^\infty(U), \mathbb{R}) := \{ g : C^\infty(U) \to \mathbb{R} \mid g$ は線型$\}$
は Def 3.7 の和とスカラー倍について
ベクトル空間となる.

これを先に示しておいて $T_p(U)$ が $\mathrm{Hom}(C^\infty(U), \mathbb{R})$ の部分空間となる
ことを示せばよい.

以下, 演習問題とする.

② $\Phi_{p,U}$ の線型性

Prop. 3.10 $\Phi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_p(U)$, $v \mapsto v_p$ は線型写像

証明の Hint :

以下を示せばよい

(i) $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$, $(\underbrace{v + w}_{\mathbb{R}^n\text{の和}})_p = v_p \underbrace{+}_{\text{Def.3.7の和}} w_p$

(ii) $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\underbrace{\lambda v}_{\mathbb{R}^n\text{のスカラー倍}})_p = \underbrace{\lambda v_p}_{\text{Def.3.7のスカラー倍}}$

Prop. 3.2 を使うと示せる.

以下, 演習問題とする.

③ $\Phi_{p,U}$ の単射性

Prop. 3.11 $\Phi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_p(U)$, $v \mapsto v_p$ は単射.

Proof : Prop 3.10 より $\Phi_{p,U}$ は線型なので. 以下を示せばよい

(示) ${}^\forall v \in \mathbb{R}^n$ ($v_p = 0 \Rightarrow v = 0$)

${}^\forall v \in \mathbb{R}$ をとり, $v_p = 0$ を仮定する.

(示) $v = 0$

$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \quad (a_i \in \mathbb{R})$ とおく.

示) $a_i = 0 \quad ({}^\forall i = 1, \cdots, n)$

${}^\forall i = 1, \cdots, n$ をとる.

示) $a_i = 0$

ここで $\xi_i : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_i$ とおくと $\xi_i \in C^\infty(U)$

$(\because \text{Prop. } 2.5)$

Prop 3.2 と $\frac{\partial}{\partial x_j}\xi_i(p) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ より

$v_p(\xi_i) = a_i$ となる.

いま $v_p = 0$ (as $C^\infty(U) \to \mathbb{R}$) なので $a_i = v_p(f) = 0$ ∎

④ $\Phi_{p,U}$ の全射性

Prop 3.12: U : 凸 とする.
$\Phi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_p(U)$, $v \mapsto v_p$ は全射.

まず以下の2つの補題を用意しておく

Lemma 3.13 $1_U : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ (定数関数) とおく.

小テスト

このとき 1_U は U 上 C^∞-級で

$${}^\forall g \in T_p(U),\quad g(1_U) = 0$$

(U は凸でなくてもよい)

Lemma 3.13 の証明:

1_U は多項式関数なので U 上 C^∞-級 ($\because$ Prop 2.5)

$^\forall v \in T_p(U)$ をとる.

示 $v(1_U) = 0$ (in $\mathbb{R}$)

関数の積

1_U の定義から, $1_U \cdot 1_U = 1_U$ となることに注意すると

$$
\begin{aligned}
v(1_U) &= v(1_U \cdot 1_U) \\
&= v(1_U) \cdot \underbrace{1_U(p)}_{=1} + \underbrace{1_U(p)}_{=1} \cdot v(1_U) \quad (\because \text{ライプニッツ則}) \\
&= 2v(1_U)
\end{aligned}
$$

これより $v(1_U) = 0$

■

☞ 重要（証明は試験には出ません）

Lemma 3.14 $p \in U$：凸とする．$f \in C^\infty(U)$ を fix．

このとき $G_1^f, \cdots, G_n^f \in C^\infty(U)$ であって

$$\begin{cases} f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} G_i^f(x)(x_i - p_i) & (\forall x \in U) \\ G_i^f(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) & (\forall i = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

となるものが存在する．

この補題の証明については appendix（この原稿の最後）を見よ．

Prop 3.13 の証明　　U : 凸 とする.

$\forall v \in T_p(U)$ をとる.

各 $i = 1, \cdots, n$ について $\xi_i : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_i$ とおく.

また $a_i := v(\xi_i) \in \mathbb{R}$ とおく.

示 $\Phi_{p,U}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = v$

i.e. $\forall f \in C^\infty(U)$, $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right)_p f = v(f)$

$$\begin{array}{c} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right)_p f \\ \| \\ \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \end{array}$$

$^\forall f \in C^\infty(U)$ をとる。

(下) $$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = g(f)$$

Lemma 3.14 より $G_1^f, \cdots, G_n^f \in C^\infty(U)$ であって

$$\begin{cases} f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} G_i^f(x)(x_i - p_i) & (^\forall x \in U) \\ G_i^f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) & (^\forall i = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

となるものがとれる。

特に $1_U : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$ （定数関数）とおくと、

$$f = \underbrace{f(p)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{1_U}_{\in C^\infty(U)} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{G_i^f}_{\in C^\infty(U)} \cdot (\underbrace{\xi_i}_{\in C^\infty(U)} - \underbrace{p_i}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{1_U}_{\in C^\infty(U)}) \quad (\text{in } C^\infty(U))$$

と書ける。

従って

$$\mathcal{g}(f) = \mathcal{g}\left(f(p)\cdot 1_U + \sum_{i=1}^{n} G_i^f \cdot (\xi_i - p_i \cdot 1_U)\right)$$

$$= f(p)\cdot \underbrace{\mathcal{g}(1_U)}_{=0\ (\because \text{Lemma } 3.13)} + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{g}\left(G_i^f \cdot (\xi_i - p_i 1_U)\right)$$

$\mathcal{g}$の線型性

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathcal{g}\left(G_i^f \cdot (\xi_i - p_i 1_U)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\mathcal{g}(G_i^f)\cdot (\underbrace{\xi_i(p) - p_i\cdot 1_U(p)}_{= p_i - p_i = 0}) + \underbrace{G_i^f(p)}_{=\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)}\cdot \left(\underbrace{\mathcal{g}(\xi_i)}_{=a_i} - p_i \underbrace{\mathcal{g}(1_U)}_{=0}\right)\right)$$

ライプニッツ則
+ 線型性

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

図

2019 年前期 幾何学 A: 第 2 回 Lemma 3.14 用 補足プリント

1 Lemma 3.14 の証明

Theorem 1.1 (講義第二回 Lemma 3.14)**.** $U \subset \mathbb{R}^n$ を空でない凸な開集合とし, $p \in U$ を固定する. U 上の C^∞-級関数 $f : U \to \mathbb{R}$ を考える. このとき, ある U 上の C^∞-級関数の組 $G_1^f, \ldots, G_n^f : U \to \mathbb{R}$ であって, 以下の条件を満たすものが存在する.

- $f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n G_i^f(x)(x_i - p_i)$ *for any* $x \in U$.
- $G_i^f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

Theorem 1.1 の証明のアイディア. 各 i について関数 $G_i^f : U \to \mathbb{R}$ を

$$G_i^f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + t(x-p))dt$$

とする (U が凸であることから上記の関数が well-defined となる). このとき $G_i^f : U \to \mathbb{R}$ は C^∞-級関数となる (これは非自明な事実である: 詳しくは裏面参照). 各 $x \in U$ について

$$h_x : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(p + t(x-p))$$

とすれば

$$\begin{aligned} f(x) - f(p) &= h_x(1) - h_x(0) \\ &= \int_0^1 \frac{dh_x}{dt}(t)dt \quad (\because \text{ 微積分の基本定理}) \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(h_x(t))(x_i - p_i)dt \quad (\because \text{ 連鎖律}) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - p_i)(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + t(x-p))dt) \\ &= \sum_{i=1}^n G_i^f(x)(x_i - p_i) \end{aligned}$$

となるので一つ目の条件を満たす. また

$$G_i^f(p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)dt = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(\int_0^1 1dt) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

となるから二つ目の条件も満たす. □

$G_i^f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + tx)dt$ の微分可能性については裏面を参照

証明の中で構成した $G_i^f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p+tx)dt$ が C^∞-級であることは以下の一般的な定理から従う (確認せよ):

Theorem 1.2. 開区間 $(a,b)(\subset \mathbb{R})$ と $\mathbb{R}^n$ の開集合 U を固定し, C^1-級関数 $K:(a,b)\times U \to \mathbb{R}$ を考える. また (a,b) に含まれる有界閉区間 I も固定しておく. このとき

$$G: U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{t\in I} K(t,x)dt$$

とすると, $G: U\to\mathbb{R}$ は C^1-級関数となる. また各 $t\in I$ について $K^t: U\to\mathbb{R},\ x\mapsto K(t,x)$ とおけば, 各 $i=1,\ldots,n$ について

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x) = \int_{t\in I}\frac{\partial K^t}{\partial x_i}(x)dt \quad \text{for any } x\in U$$

が成り立つ (つまり偏微分と積分の交換が可能である).

Remark 1.3.
1. 今回考えている有界閉区間上の積分はリーマン積分と考えてもルベーグ積分と考えても (有界閉区間をルベーグ測度によって測度空間と見なしている) 同じである. 一般に $\mathbb{R}$ 上の連続関数の広義積分とルベーグ積分は (可積分性からして) 異なる可能性があるが, 有界閉区間上の連続関数はリーマン可積分かつルベーグ可積分でそれぞれの積分値も一致することが知られている.
2. 関数 K の満たす条件としてはもっと緩和された状況で考えることも可能であるが, ここでは面倒な議論を避けるため大きな開集合上で C^1-級であるという強い仮定を置いている.

Theorem 1.2 の証明のヒント:

$v\in\mathbb{R}^n$ を任意に選んで固定する. ルベーグの優収束定理 (下に主張だけ書いておく) を用いると, U 内の点 x に収束する点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について,

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{s\to 0}\int_{t\in I}\frac{K^t(x_n+sv)-K^t(x_n)}{s}dt = \int_{t\in I}\lim_{n\to\infty}\lim_{s\to 0}\frac{K^t(x_n+sv)-K^t(x_n)}{s}dt$$

が正当化できる. このとき左辺は $\lim_{n\to\infty} v_{x_n}(G)$ で, 右辺は $\int_{t\in I} v_x(K^t)dt$ である (ただし v_y は y における v での方向微分とする). 特に偏導関数 $v(G): U\to\mathbb{R},\ x\mapsto v_x(G)$ は well-defined な連続関数で $v_x(G) = \int_{t\in I} v_x(K^t)dt$ $(x\in U)$ となることが分かる.

Theorem 1.4 (ルベーグの優収束定理)**.** (I,m) を測度空間とし, I 上の関数 $f: I\to\mathbb{R}$ と I 上の可測関数の列 $\{f_n: I\to\mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が以下の条件を満たしているとする:

- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に各点収束する.
- ある可積分関数 $g: I\to\mathbb{R}$ であって, 十分大きな n について $|f_n(t)|\le g(t) \quad (\text{for any } t\in I)$ となるものが存在する.

このとき f_n $(n\in\mathbb{N})$, f はそれぞれ可積分で,

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n dm = \int_I f dm.$$

Theorem 1.2 の証明. 各 $x \in U$ について $K_x : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto K(t,x)$ とおけば, $G(x) = \int_{t \in I} K_x(t)dt$ である. これが well-defined であることは K_x が有界閉区間 I 上の連続関数であり, 特にルベーグ可積分である (リーマン可積分でもある) ことから従う.

以降ベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ を任意に選んで固定する. 各 $x \in U$ について v_x を x における v での方向微分とする. このとき, 以下の事を示せばよい.

- 各 $x \in U$ について関数 $I \to \mathbb{R},\ t \mapsto v_x(K^t)$ が I 上可積分.
- $\frac{G(x+sv)-G(x)}{s} \to \int_{t \in I} v_x(K^t)dt$ (as $s \to 0$). 特に $v_x(G) = \lim_{s \to 0} \frac{G(x+sv)-G(x)}{s}$ は well-defined.
- $v(G) : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto v_x(G)$ が連続.

各 $x \in U$ と $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ について

$$f_s^x : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{K(t, x+sv) - K(t,x)}{s}$$

とすれば, f_s^x は $|s|$ が十分小さいとき well-defined である. いま $K : (a,b) \times U \to \mathbb{R}$ は C^1-級であったから

$$v(K) : (a,b) \times U \to \mathbb{R},\ (t,x) \mapsto v_x(K^t)$$

は連続である. 特に各 x の U 内のコンパクト近傍 V_x を固定すると, $v(K)$ は $I \times V_x$ 上有界であり,

$$M_x := \sup_{(t,y) \in I \times V_x} |v_y(K^t)| < \infty$$

とおける. このとき各 $x \in U$ に対して, $|s|$ が十分小さい状況では $x + sv \in V_x$ であり,

$$\begin{aligned} |f_s^x(t)| &= \left|\frac{K(t,x+sv) - K(t,x)}{s}\right| \\ &\le \sup_{y \in V_x} |v_y(K^t)| \quad (\because \text{平均値の定理}) \\ &\le M_x \quad (\text{for any } t \in I) \end{aligned}$$

となる.

以下 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 内の数列 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で $s_n \to 0$ (as $n \to \infty$) となるものを任意に固定する. このとき関数列 $\{f_{s_n}^x\}_{n \in \mathbb{N}}$ は

$$f^x : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto v_x(K^t)$$

に各点収束し, n が十分大きいとき

$$|f_{s_n}^x(t)| \le M_x \quad \text{for any } t \in I$$

である. 従ってルベーグの優収束定理より $f_{s_n}^x(t) = \frac{K(t,x+s_nv)-K(t,x)}{s_n}$, $f^x(t) = v_x(K^t)$ は I 上可積分で,

$$\begin{aligned} \int_{t \in I} v_x(K^t)dt &= \int_{t \in I} f^x(t)dt \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_{t \in I} f_{s_n}^x(t)dt \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_{t \in I} \frac{K(t,x+s_nv) - K(t,x)}{s_n}dt \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{G(x+s_nv) - G(x)}{s_n} \end{aligned}$$

を得る. 特に 0 に収束する $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 内の数列 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ としては任意のものを考えてたので, 各 $x \in U$ について $v_x(G) := \lim_{s\to 0} \frac{G(x+sv)-G(x)}{s}$ は well-defined で $v_x(G) = \int_{t\in I} v_x(K^t)dt$ となる.

最後に $v(G): U \to \mathbb{R},\ x \mapsto v_x(G) = \int_{t\in I} v_x(K^t)dt$ が連続であることを示そう. U 内の収束点列 $x_n \to x$ (as $n \to \infty$) について, $v_{x_n}(G) \to v_x(G)$ (as $n \to \infty$) となることを示せばよい. いま $K: (a,b) \times U \to \mathbb{R}$ は C^1-級であるから, $v(K): I \times U \to \mathbb{R},\ (t,x) \mapsto v_x(K^t)$ は連続であったことを思い出すと, 連続関数 $F_n = f^{x_n}: I \to \mathbb{R},\ t \mapsto v_{x_n}(K^t)$ は $F = f^x : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto v_x(K^t)$ に各点収束する. n が十分大きいとき $x_n \in V_x$ であり, このとき

$$|F_n(t)| = |v_{x_n}(K^t)| \leq \sup_{y\in V_x} |v_y(K^t)| \leq M_x \text{ for any } t \in I$$

を得る. 従って再度ルベーグの優収束定理を用いると

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} v_{x_n}(G) &= \lim_{n\to\infty} \int_{t\in I} v_{x_n}(K^t)dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{t\in I} F_n(t)dt \\
&= \int_{t\in I} F(t)dt \\
&= \int_{t\in I} v_x(K^t)dt \\
&= v_x(G).
\end{aligned}$$

□