前回　§3：方向微分の関数論的特徴付け

今回　§4：ユークリッド空間の開集合上のベクトル場

全体：

Part I：多変数関数の微分　~~§6~~ §5 まで

Part II：局所座標

Part III：可微分多様体

Part IV：可微分多様体の間の写像

"Part I : 多変数関数の微分" でやりたい事

$$U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n \quad について$$

$$U \neq \emptyset$$

$C^\infty(U)$ の言葉で各種概念を説明する.

方向微分（接ベクトル） 済

ベクトル場 (§4)

C^∞-写像

全微分（Jacobi行列） §5

~~陰関数定理~~ (§6)

§4: ユークリッド空間の開集合上のベクトル場

内容

- C^∞-ベクトル場
- 偏微分方程式（見学）
- ベクトル場と接ベクトル
- ベクトル場の bracket 積

◎ C^∞-級ベクトル場

設定： $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix.

$\emptyset \neq U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ も fix

記号：

$C^\infty(U) := \{ f : U \to \mathbb{R} \mid f$ は U 上 C^∞-級 $\}$

$\mathbb{R}$-代数

Def. 4.1 :

この講義では略す.

写像 $X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ が U 上の (C^∞-級)ベクトル場

$$f \mapsto Xf$$

慣習上 $X(f)$ とは書かないことが多い

であるとは以下を満たすこと

- X は線型写像
- $\forall f, g \in C^\infty(U)$,

"場のライプニッツ則"

(この講義だけの言い方)

$$X(f \cdot g) = (Xf) \cdot g + f \cdot (Xg)$$

as in $C^\infty(U)$

$p \in U$ を fix.

Recall: $\mathfrak{J} \in T_p(U)$ （$\mathfrak{J}$ は U の p における接ベクトル）

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def}}$ $\mathfrak{J} : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$: 線型 かつ

$$\mathfrak{J}(f \cdot g) = \mathfrak{J}(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \mathfrak{J}(g)$$

as in $\mathbb{R}$ （p におけるライプニッツ則）

後でベクトル場と接ベクトルの関係を述べる.

Def. 4.2 : $\mathfrak{X}^\infty(U) := \left\{ X : C^\infty(U) \to C^\infty(U) \;\middle|\; X$ は U 上の C^∞-級ベクトル場 $\right\}$

とおく.

Prop. 4.3 : $\mathrm{End}(C^\infty(U)) := \{ \zeta : C^\infty(U) \to C^\infty(U) \mid \zeta$ は線型 $\}$ とおく.

↑ 線型作用素の空間

$\mathrm{End}(C^\infty(U))$ は 以下の 和, スカラー倍 によって ベクトル空間となる.

作用素の和 : $X_1 + X_2 : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto X_1 f + X_2 f$

$(X_1, X_2 \in \mathrm{End}(C^\infty(U)))$

作用素のスカラー倍 :

$\lambda X : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto \lambda \cdot (Xf)$ $(X \in \mathrm{End}(C^\infty(U)),\ \lambda \in \mathbb{R})$

また

$\mathfrak{X}^\infty(U)$ は $\mathrm{End}(C^\infty(U))$ の線型部分空間である.

Prop. 4.4 : 各 $i = 1, \cdots, n$ について

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : C^\infty(U) \to C^\infty(U), \quad f \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} f$$

は U 上のベクトル場である. (i.e. $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}^\infty(U)$)

(Hint: 線型性は Prop. 2.12. "場のライプニッツ則" を確認すればよい)

小テスト

Prop. 4.5 : X : U 上のベクトル場
$h \in C^\infty(U)$ を fix

このとき $hX : C^\infty(U) \to C^\infty(U), \quad f \mapsto \underbrace{h}_{C^\infty(U)} \cdot \underbrace{(Xf)}_{C^\infty(U)}$

は U 上のベクトル場である.
(i.e. $hX \in \mathfrak{X}^\infty(U)$)

← 試験出てない

(この構造により $\mathfrak{X}^\infty(U)$ は $C^\infty(U)$-module となる)

Prop 4.5 の証明：

(示) $hX : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto h\cdot(Xf)$ は

① 線型 かつ

② 場のライプニッツ則を満たす．

① を示す： $X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ は 線型

かけ算作用素 → $L_h : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto h\cdot f$ も 線型 ($\because$ Prop 2.15 から従う)

特に $hX = L_h \circ X$ も 線型．

② を示す： $\forall f, g \in C^\infty(U)$ をとる．

(示) $(hX)(f\cdot g) = (hXf)\cdot g + f\cdot(hXg)$

左 $= (hX)(f\cdot g) = L_h(X(f\cdot g))$

$= L_h((Xf)\cdot g + f\cdot(Xg))$　(∵ X のライプニッツ則)

$= L_h((Xf)\cdot g) + L_h(f\cdot(Xg))$　(∵ L_h の線型性)

$= h\cdot((Xf)\cdot g) + h\cdot(f\cdot(Xg))$　(∵ L_h の定義)

$= (h\cdot Xf)\cdot g + f\cdot(h\cdot(Xg))$

$=$ 右　(∵ "関数の積" の結合性と可換性)

∎

Theorem 4.6 : $n \geq 1$ とする.

このとき $\mathfrak{X}^\infty(U)$ はベクトル空間として無限次元

Hint : Thm 2.13 より $C^\infty(U)$ はベクトル空間として無限次元であった.

従って以下を示せば十分

Lemma 4.7 :

線形写像 : $C^\infty(U) \to \mathfrak{X}^\infty(U)$, $h \mapsto h\frac{\partial}{\partial x_1}$ は単射

Fact 4.7 $\mathfrak{X}^\infty(U) = \{ \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mid h_i \in C^\infty(U) \quad i=1,\cdots,n \}$

この講義では用いない事実

◎ 偏微分方程式（見学）

ベクトル場の言葉で"偏微分方程式"を扱うこともできる．
（PDE）

（"どうやったら解けるか"ということはここでは問題にしない！）

Ex.4.8. $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ を fix.

PDE : " $Xf = 0$ " ← 1階線型偏微分方程式

解空間 : $\{ f \in C^\infty(U) \mid Xf = 0 \} \subset C^\infty(U)$

線型部分空間

$= \operatorname{Ker} X$

線型写像 $C^\infty(U) \to C^\infty(U)$

Ex 4.9 $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ を fix.

PDE : "$XYf = 0$" ← 2階線型偏微分方程式

解空間 : $\{ f \in C^\infty(U) \mid XYf = 0 \} \subset C^\infty(U)$ 線型部分空間

$\| \quad \mathrm{Ker}\, XY$

線型写像 $X, Y : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$

の合成

(特に $XY : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$

は線型)

Ex 4.10 $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ を fix.

PDE : $Y(\sin(Xf)) - f = 0$ ← 非線型偏微分方程式

解空間 : $\{ f \in C^\infty(U) \mid Y(\sin(Xf)) - f = 0 \} \subset C^\infty(U)$

どんな空間か調べるのは簡単ではない.

◎ ベクトル場と接ベクトル

Def. 4.11: 各 $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$, $p \in U$ について

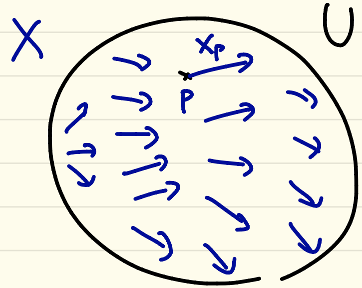
$X_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto (Xf)(p)$ とおく.

Prop. 4.12 $X_p \in T_p(U)$.

Hint: ㊥ ① $X_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ は線型

② $\forall f, g \in C^\infty(U)$, $X_p(f \cdot g) = (X_p f) \cdot g(p) + f(p) \cdot (X_p g)$

Prop 4.13: $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$



以下は同値

(i) $X = Y$ as in $\mathfrak{X}^\infty(U)$

(ii) $X_p = Y_p$ as in $T_p(U)$ for any $p \in U$.

ベクトル場とは"各点で接ベクトルを与えたもの"のように考えることもできる.

ベクトル束の観点:

$$X : U \to T(U) = \bigsqcup_{p \in M} T_p(U) \quad : C^\infty\text{-級切断}$$
$$p \mapsto X_p$$

と思ってもよい.

試験出てない

@ ベクトル場の bracket 積

$X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ とする.

一般に

$$XY : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto XYf$$

や

$$YX : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto YXf$$

は ベクトル場になるとは限らない

(線型性は満たすが
場のライプニッツ則を満たすとは限らない)

Theorem 4.14 : $^\forall X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$,

End($C^\infty(U)$) における"差"

$C^\infty(U)$ の"差"

$[X, Y] := XY - YX \quad C^\infty(U) \to C^\infty(U), \ f \mapsto XYf - YXf$

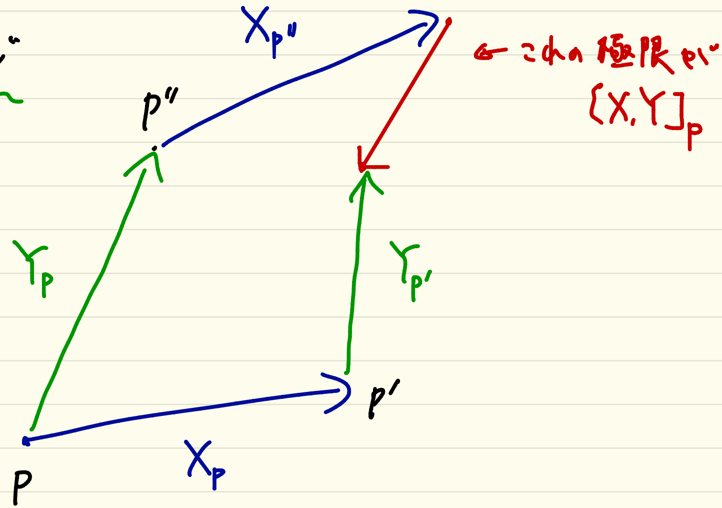
は U 上のベクトル場

X と Y の bracket 積

Hint : ⽰ $[X, Y] : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ は ① 線型 ② 場のライプニッツ則を満たす.

bracket 積のイメージ

$[X, Y]$ は X による flow と Y による flow の "非可換性" を表す.



Ex 4.15

$$X = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \ , \quad Y = \sum_{j=1}^{n} g_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \left(\begin{array}{l} h_i, g_j \in C^\infty(U), \\ i,j = 1, \cdots, n \end{array} \right)$$

とする.

このとき

$$[X, Y] = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} h_l \frac{\partial g_k}{\partial x_l} - g_l \frac{\partial h_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

となる.

特に $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0 \quad ({}^\forall i, j)$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} f = \frac{\partial}{\partial x_j \partial x_i} f \quad ({}^\forall f \in C^\infty(U)) \right)$$

Prop. 4.16 : $(\mathfrak{X}^\infty(U), [\ ,\ ])$ は Def 2.14 の意味で $\mathbb{R}$-代数

(但し，$[\ ,\ ]$ は結合律は満たさない)

($(\mathfrak{X}^\infty(U), [\ ,\ ])$ は Lie 代数と呼ばれる代数系となっている)

試験出ません