前回　§4：ユークリッド空間の開集合上の
ベクトル場

今回　§5：C^∞-級写像と全微分の
関数論的定義　（前半）

全体：

Part I：多変数関数の微分　← ~~§6~~ §5 まで

Part II：局所座標

Part III：可微分多様体

Part IV：可微分多様体の間の写像

"Part I：多変数関数の微分" でやりたい事

$U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ について
$U \neq \emptyset$

$C^\infty(U)$ の言葉で各種概念を説明する.

方向微分（接ベクトル） 済

ベクトル場 済

C^∞-写像

全微分（Jacobi 行列） §5

~~陰関数定理（§6）~~

§5: C^∞-級写像と全微分の関数論的定義

内容

- C^∞-級写像
- 全微分
- 全微分の行列表示 (Jacobi行列)
- 曲線の速度ベクトル
- 速度ベクトルと全微分

前半

後半

◎ C^∞-級写像

設定： $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定

$\emptyset \neq U_1 \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_1}$, $\emptyset \neq U_2 \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_2}$ を固定

記号： 各 $i = 1, 2$ について

無限次元 $\mathbb{R}$-代数

$C^\infty(U_i) := \{ f : U_i \to \mathbb{R} \mid f$ は U_i 上 C^∞-級 $\} \subset Map(U_i ; \mathbb{R})$

写像 $\varphi : \underset{\subset \mathbb{R}^{n_1}}{U_1} \to \underset{\subset \mathbb{R}^{n_2}}{U_2}$ について考える.

Def. 5.1

$$\varphi^* : \mathrm{Map}(U_2 ; \mathbb{R}) \to \mathrm{Map}(U_1 ; \mathbb{R})$$
$$f \mapsto f \circ \varphi$$

順番に注意.

φ による関数の引き戻し

図式：
$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f\circ\varphi"'] & U_2 \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Prop. 5.2 $\varphi^*: \mathrm{Map}(U_2;\mathbb{R}) \to \mathrm{Map}(U_1;\mathbb{R})$

$f \mapsto f\circ\varphi$

は $\mathbb{R}$-代数準同型

Def. 5.3 $(V,\cdot)$, $(W,\cdot)$ を $\mathbb{R}$-代数とする.

線型写像 $\phi: V \to W$ が $\mathbb{R}$-代数準同型であるとは

以下を満たすこと

① ${}^\forall v_1, v_2 \in V$, $\phi(v_1\cdot v_2) = \phi(v_1)\cdot\phi(v_2)$

Def. 5.3 (C^∞-級写像)

写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ が C^∞-級写像であるとは

$$\forall f \in C^\infty(U_2), \quad \varphi^*(f) := f \circ \varphi \in C^\infty(U_1)$$

が成り立つこと

(i.e. $\varphi^* : C^\infty(U_2) \to C^\infty(U_1),\ f \mapsto f \circ \varphi$ が well-defined)

抽象論に使いやすい定義

Prop. 5.4：写像 $\varphi: U_1 \to U_2$ について以下は同値

(i) φ は Def. 5.3 の意味で C^∞-級 (i.e. $\varphi^*(C^\infty(U_2)) \subset C^\infty(U_1)$)

$\Updownarrow$

(ii) $\varphi: U_1 \to \underset{\subset \mathbb{R}^{n_2}}{U_2}$, $x \mapsto (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_{n_2}(x))$ と書いたとき,

$\varphi_1, \cdots, \varphi_{n_2}: U_1 \to \mathbb{R}$ がすべて U_1 上 C^∞-級関数

計算で確認しやすい条件

Ex 5.5

$n_1 = n_2 = 2$.

$$U_1 := \{ (u_1, v_1) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 + v_1^2 < 1,\ u_1 > 0 \} \subset \mathbb{R}^2$$

$$U_2 := \{ (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_2^2 + v_2^2 < 1,\ v_2 > 0 \} \subset \mathbb{R}^2$$

このとき $\varphi : U_1 \to U_2$, $(u_1, v_1) \mapsto \left(v_1, \sqrt{1-(u_1^2+v_1^2)}\right)$

は well-defined で C^∞-級

Hint: Prop.5.4 を用いよ.

（この写像は後で，球面の多様体構造の構成に用いる）

小テスト

Theorem 5.6: $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix

(合成写像の C^∞-性) 各 $i = 1, 2, 3$ について $\emptyset \neq U_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_i}$ を fix

$\varphi : U_1 \to U_2 : C^\infty$-級

$\psi : U_2 \to U_3 : C^\infty$-級 とする。

このとき $\psi \circ \varphi : U_1 \to U_3$ も C^∞-級

図式：

$$
\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "\psi \circ \varphi"] \arrow[rrd, bend right, "f \circ \psi \circ \varphi"'] & U_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[rd, "f \circ \psi"] & U_3 \arrow[d, "f"] \\
 & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

Theorem 5.6 の証明： C^∞-級写像の定義より，以下を示せばよい．

(示) $\forall f \in C^\infty(U_3)$, $(\psi \circ \varphi)^*(f) \in C^\infty(U_1)$

$$(\psi \circ \varphi)^*(f) = f \circ \psi \circ \varphi : U_1 \to \mathbb{R}$$

$\forall f \in C^\infty(U_3)$ をとる．

(示) $f \circ (\psi \circ \varphi) \in C^\infty(U_1)$

いま $\psi : U_2 \to U_3$ は C^∞-級写像なので，定義から

$$\psi^*(f) = f \circ \psi \in C^\infty(U_2).$$

また

$\varphi : U_1 \to U_2$ も C^∞-級写像なので，定義から

$$\varphi^*(f \circ \psi) = (f \circ \psi) \circ \varphi = f \circ (\psi \circ \varphi) \in C^\infty(U_1).$$

$\blacksquare$

◎ C^∞-級写像の全微分

設定： $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: fix

$\emptyset \neq U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $\emptyset \neq U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$: fix

$\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$: C^∞-級写像 も fix

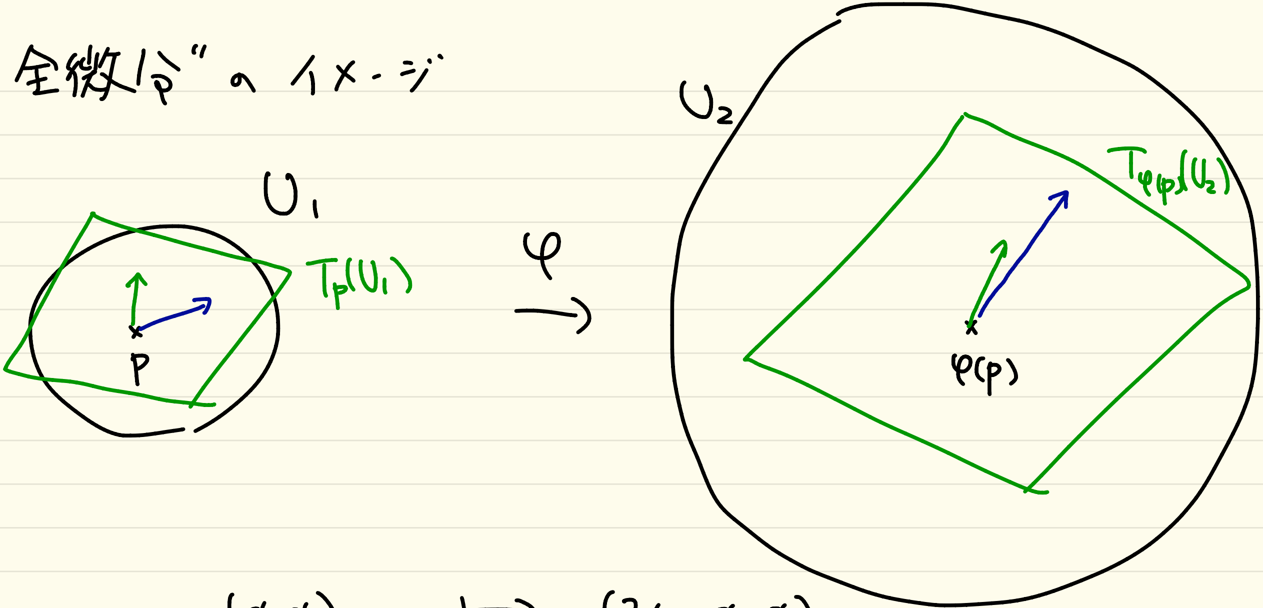
$p \in U_1$ も fix

記号： $T_p(U_1) := \{ g : C^\infty(U_1) \to \mathbb{R} \mid$ 線型 かつ p におけるライプニッツ則 $\}$

$T_{\varphi(p)}(U_2) := \{ \xi : C^\infty(U_2) \to \mathbb{R} \mid$ 線型 かつ $\varphi(p)$ におけるライプニッツ則 $\}$

$\varphi(p) \in U_2$

"全微分" のイメージ



$$(x_1, x_2) \longmapsto (2x_1, x_1 + x_2)$$

$$T_p(U_1) \xrightarrow[\text{線型}]{d\varphi} T_{\varphi(p)}(U_2) \quad \text{with 表現行列} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Jacobi行列)

($d\varphi$ = φ の p における "線型近似")

Def. 5.7. 各 $g \in T_p(U_1)$ について,

写像 $(d\varphi)_p(g) : C^\infty(U_2) \to \mathbb{R}$ を

$$(d\varphi)_p(g) : C^\infty(U_2) \to \mathbb{R}$$ と定める.

$$f \mapsto g(\underbrace{\varphi^*(f)}_{= f \circ \varphi \in C^\infty(U_1)})$$

つまり $(d\varphi)_p(g) = g \circ \varphi^*$.

Prop. 5.8: 任意の $g \in T_p(U_1)$ について

$$(d\varphi)_p(g) \in T_{\varphi(p)}(U_2)$$

i.e. $(d\varphi)_p(g) : C^\infty(U_2) \to \mathbb{R}$ は線型で,

$\varphi(p) \in U_2$ においてライプニッツ則を満たす.

Prop 5.8 より 写像

$$(d\varphi)_p : T_p(U_1) \to T_{\varphi(p)}(U_2)$$ を得る.

$$\begin{array}{ccc} \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ g & \mapsto & (d\varphi)_p(g) = g \circ \varphi^* \end{array}$$

Def. 5.9 : $(d\varphi)_p : T_p(U_1) \to T_{\varphi(p)}(U_2)$ を

C^∞-級写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ の $p \in U_1$ における全微分 という.

Prop. 5.10 : 写像 $(d\varphi)_p : T_p(U_1) \to T_{\varphi(p)}(U_2)$ は 線型写像.

L

中間試験

Theorem 5.11

(合成写像の全微分)

$n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix

各 $i = 1, 2, 3$ について

$$\emptyset \neq U_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_i} \text{ を fix}$$

$\varphi : U_1 \to U_2$: C^∞-級写像

$\psi : U_2 \to U_3$: C^∞-級写像 とする.

(Theorem 5.6 より $\psi \circ \varphi : U_1 \to U_3$ は C^∞-級)

また $p \in U_1$ を fix する.

このとき

$$d(\psi \circ \varphi)_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p : T_p(U_1) \to T_{(\psi\circ\varphi)(p)}(U_3)$$

Theorem 5.11 の証明

示 $d(\psi\circ\varphi)_p = (d\psi)_{\varphi(p)}\circ(d\varphi)_p$

as $T_p(U_1) \to T_{(\psi\circ\varphi)(p)}(U_3)$

i.e. $\forall y \in T_p(U_1)$, $d(\psi\circ\varphi)_p(y) = ((d\psi)_{\varphi(p)}\circ(d\varphi)_p)(y)$

as in $T_{(\psi\circ\varphi)(p)}(U_3)$

$\forall y \in T_p(U_1)$ をとる.

示 $d(\psi\circ\varphi)_p(y) = ((d\psi)_{\varphi(p)}\circ(d\varphi)_p)(y)$

as $C^\infty(U_3) \to \mathbb{R}$

i.e. $\forall f \in C^\infty(U_3)$,

$(d(\psi\circ\varphi)_p(y))(f) = (((d\psi)_{\varphi(p)}\circ(d\varphi)_p)(y))(f)$

as in $\mathbb{R}$

$^\forall f \in C^\infty(U_3)$ をとる.

示 $\big(d(\psi\circ\varphi)_p(y)\big)(f) = \big(\big((d\psi)_{\varphi(p)}\circ(d\varphi)_p\big)(y)\big)(f)$

as in $\mathbb{R}$

左辺 $= y\big((\psi\circ\varphi)^*(f)\big)$ (∵全微分の定義)

$= y\big(f\circ(\psi\circ\varphi)\big)$ (∵引き戻しの定義)

右辺 $= (d\psi)_{\varphi(p)}\big(\underbrace{(d\varphi)_p(y)}_{\in T_{\varphi(p)}(U_2)}\big)(f)$

$= \big((d\varphi)_p(y)\big)(\psi^* f)$ (∵全微分の定義)

$= \big((d\varphi)_p(y)\big)(f\circ\psi)$ (∵引き戻しの定義)

↓ つづく

$= ((d\varphi)_p(y))(f\circ\psi)$ （前のページの最後）

$= y(\varphi^*(f\circ\psi))$ （∵全微分の定義）

$= y((f\circ\psi)\circ\varphi)$ （∵引き戻しの定義）

$= y(f\circ(\psi\circ\varphi))$

よって 左辺 $= y(f\circ(\psi\circ\varphi)) =$ 右辺 $\boxtimes$