講義 前半予定

Part I

§1 イントロダクション

§2 C^∞-級関数

§3 方向微分

§4 ベクトル場

§5 C^∞-級写像と全微分

Part II

§6 局所座標とその貼り合わせ

§7 陰関数定理

↑ 中間ここまで

前回　§4：ユークリッド空間の開集合上のベクトル場

今回　§5：C^∞-級写像と全微分の関数論的定義　(後半)

全体：

Part I：多変数関数の微分　← §5まで

Part II：局所座標

Part III：可微分多様体

Part IV：可微分多様体の間の写像

"Part I：多変数関数の微分" でやりたい事

$U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ について
$U \neq \emptyset$

$C^\infty(U)$ の言葉で各種概念を説明する.

方向微分（接ベクトル） 済

ベクトル場 済

C^∞-写像

全微分（Jacobi 行列）

§5

§5: C^∞-級写像と全微分の関数論的定義

内容

- C^∞-級写像 ｝前半
- 全微分
- 全微分の行列表示 ｝後半
- 曲線の速度ベクトル
- 速度ベクトルと全微分

◎ 全微分の行列表示

設定： $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: fix

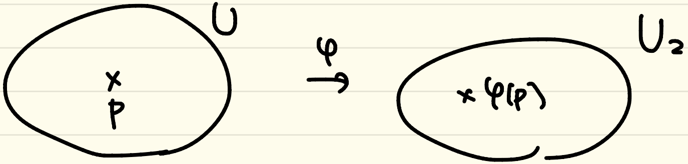
$\emptyset \neq U_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_i}$: fix $(i=1,2)$ に戻す.

復習： $\varphi : U_1 \to U_2$: C^∞級写像, $p \in U_1$ とする.

$$(d\varphi)_p : T_p(U_1) \to T_{\varphi(p)}(U_2)$$

$$\gamma \mapsto (d\varphi)_p(\gamma) = \gamma \circ \varphi^* : C^\infty(U_2) \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \gamma(f \circ \varphi)$$



以下，$\{e_1, \cdots, e_{n_1}\}$ を $\mathbb{R}^{n_1}$ の標準基底

$\{e_1', \cdots, e_{n_2}'\}$ を $\mathbb{R}^{n_2}$ の標準基底 とする．

各 $j = 1, \cdots, n_1$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p : C^\infty(U_1) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(p + he_j) - f(p)}{h}$$

$$\left(\overset{!!}{\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)} \right)$$

とおく．

これらで $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{n_1}}\right)_p \in T_p(U_1)$

また 各 $i = 1, \cdots, n_2$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)} : C^\infty(U_2) \to \mathbb{R}, \quad g \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{g(\varphi(p) + he_i') - g(\varphi(p))}{h}$$

とおく．

これらで $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)}, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y_{n_2}}\right)_{\varphi(p)} \in T_{\varphi(p)}(U_2)$

小テスト

Prop. 5.12 : $\varphi : U_1 \to U_2$: C^∞-級写像, $p \in U_1$ とする.

$\varphi : U_1 \to U_2$, $x \mapsto (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_{n_2}(x))$ と書く.

このとき 各 $j = 1, \cdots, n_1$ について

$$(d\varphi)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)}$$

Prop 5.12 の証明: $j = 1, \cdots, n_1$ を任意にとる.

(i.) $(d\varphi)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)}$

as in $T_{\varphi(p)}(U_2)$

(as $C^\infty(U_2) \to \mathbb{R}$)

i.e. $\forall f \in C^\infty(U_2)$,

$(d\varphi)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)(f) = \left(\sum_{i=1}^{n_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)}\right)(f)$

as in $\mathbb{R}$

${}^{\forall} f \in C^\infty(U_2)$ をとる.

(証) $(d\varphi)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)(f) = \left(\sum_{i=1}^{n_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)}\right)(f)$

左辺 $= \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p (f \circ \varphi)$ ($\because$ 全微分の定義)

$= \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_j}(p)$ ($\because$ $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$ の定義)

$= \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p) \frac{\partial f}{\partial y_i}(\varphi(p))$ ($\because$ 連鎖律)

$= \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)}(f)\right)$ ($\because$ $\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{\varphi(p)}$ の定義)

$= \left(\sum_{i=1}^{n_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)}\right)(f)$ ($\because$ $T_{\varphi(p)}(U_2)$ の和とスカラー倍の定義)

図

以下しばらく，簡単のため"U_1, U_2 は共に凸"と仮定する.

(Thm 3.6 を使いたい)

特に Theorem 3.6 より

$$\Phi_{p,U_1} : \mathbb{R}^{n_1} \to T_p(U_1),\ v \mapsto v_p \qquad (p \in U_1)$$

$$\Phi_{q,U_2} : \mathbb{R}^{n_2} \to T_q(U_2),\ w \mapsto w_q \qquad (q \in U_2)$$

は共に線型同型である.

従って $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right\}_{j=1,\cdots,n_1} = \left\{\Phi_{p,U_1}(e_j)\right\}_{j=1,\cdots,n_1}$ は $T_p(U_1)$ の基底

$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_q\right\}_{i=1,\cdots,n_2} = \left\{\Phi_{q,U_2}(e_i)\right\}_{i=1,\cdots,n_2}$ は $T_q(U_2)$ の基底

U_1, U_2 : 開 とする.

Cor 5.13 : $\varphi : U_1 \to U_2$: C^∞-級写像, $p \in U_1$ とする.

$$(d\varphi)_p : T_p(U_1) \to T_{\varphi(p)}(U_2) \quad (\text{線型写像})$$

の行列表示 with respect to

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right\}_{j=1,\dots,n_1} \text{ and } \left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)}\right\}_{i=1,\dots,n_2}$$

は

$$(J\varphi)_p := \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i=1,\dots,n_2,\ j=1,\dots,n_1}$$ と書ける.

← ヤコビ行列

i.e. $v = \sum_{j=1}^{n_1} a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \ (a_j \in \mathbb{R})$, $(d\varphi)_p(v) = \sum_{i=1}^{n_2} b_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)} \ (b_i \in \mathbb{R})$

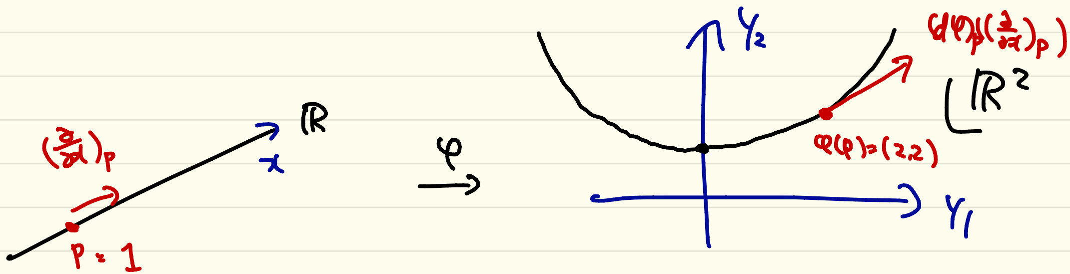
とおくと,

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n_2} \end{pmatrix} = (J\varphi)_p \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n_1} \end{pmatrix}$$

Ex. 5.14

$n_1=1,\ n_2=2 \qquad U_1=\mathbb{R},\ U_2=\mathbb{R}^2$

$$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\quad x\mapsto(2x,\ x^2+1)$$



このとき $\varphi_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto 2x$

$\varphi_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2+1$ より

$$(J\varphi)_p=\begin{pmatrix}2\\2p\end{pmatrix}$$

特に

$$(d\varphi)_p\left(a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p\right)=2a\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)}+2pa\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{\varphi(p)}$$

注: $n=1$ のとき通常

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p$ を $\left(\frac{d}{dx}\right)_p$ のように書く

(この講義では"どちらで書いてもOK"という立場をとる)

いまだけ

$$L_p := \Phi_{\varphi(p), U_2}^{-1} \circ (d\varphi)_p \circ \Phi_{p, U_1} : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$$ （線型写像）

とおく．

$$\left(\text{図式：} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n_1} & \xrightarrow{L_p} & \mathbb{R}^{n_2} \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ T_p(U_1) & \xrightarrow{(d\varphi)_p} & T_{\varphi(p)}(U_2) \end{array} \right)$$

Prop. 5.15：次が成り立つ

$$\lim_{\substack{v \to 0 \\ (v \in \mathbb{R}^{n_2} \setminus \{0\})}} \frac{\| \overbrace{\varphi(p+v) - \varphi(p)}^{\ni\, \mathbb{R}^{n_2}} - L_p(v) \|}{\| v \|} = 0$$

← 解析の講義で習う意味で $L_p : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$ は $\varphi : U_1 \to U_2$ の p における全微分．

試験出ません

@ 曲線の速度ベクトル

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: fix

$\emptyset \neq U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$: fix

$\underset{\text{開区間}}{(a, b)} \subset \mathbb{R}$: fix $\quad (-\infty \leqq a < b \leqq +\infty)$

<u>Def. 5.16</u> : C^∞-級写像

$c : (a, b) \longrightarrow U$ を U 上の C^∞-曲線と呼ぶ.

Def. 5.17: U 上の C^∞-曲線 $c:(a,b)\to U$ と $t_0\in(a,b)$ について

$$\dot{c}(t_0): C^\infty(U)\to\mathbb{R}$$
$$f\mapsto \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ c)(t+h)-(f\circ c)(t)}{h}$$

とおく。

曲線 c の時刻 t_0 における速度ベクトル

Prop 5.18: $\dot{c}(t_0)=(dc)_{t_0}\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_{t_0}\right)\in T_{c(t_0)}U$

速度ベクトルは接ベクトル

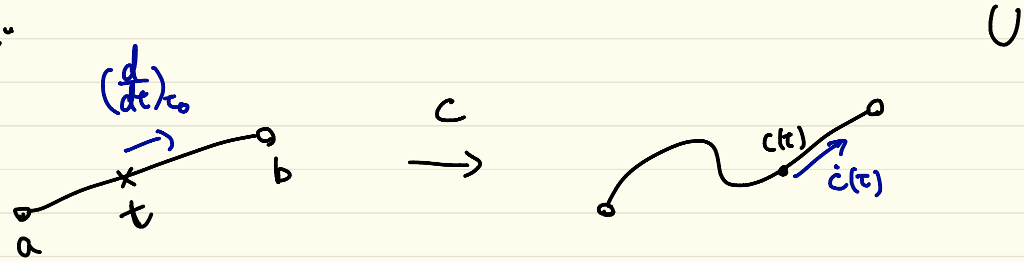
ただし

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{t_0}: C^\infty((a,b))\to\mathbb{R}$$
$$g\mapsto\lim_{h\to 0}\frac{g(t_0+h)-g(t_0)}{h}=g'(t_0)$$

$\left(=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{t_0}\right)$

とおいた。

イメージ



Prop. 5.19 : Def 5.17 の設定において

$c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ と書くと,

$$\dot{c}(t_0) = \Phi_{c(t_0), U}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i'(t_0) e_i \right)$$

"方向微分を考える"

U : 凸 とする (Thm3.6 を使うための仮定 : 後で外れる)

Prop 5.20 $\forall p \in U$, $\forall v \in T_p(U)$,

$\exists \varepsilon > 0$, $\exists c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$: C^∞-級曲線 s.t.

$c(0) = p$, $\dot{c}(0) = v$.

どんな接ベクトルも"ある曲線の速度ベクトル"として書ける.

◎ 速度ベクトルと全微分

設定： $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix

$\emptyset \neq U_1 \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_1}$, $\emptyset \neq U_2 \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_2}$ を fix.

$\varphi : U_1 \to U_2$: C^∞-級写像 を fix

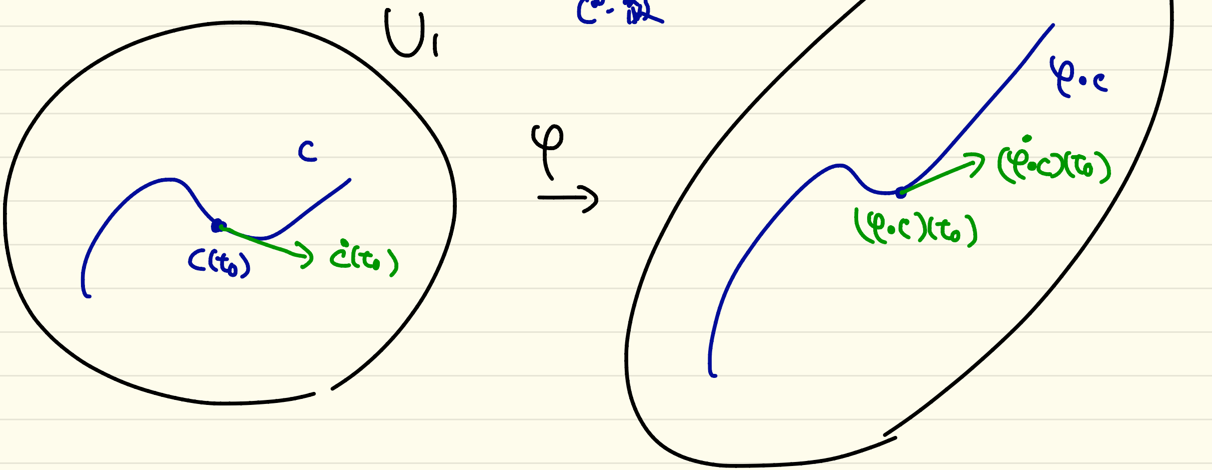
Theorem 5.21 : $-\infty \leqq a < t_0 < b \leqq \infty$ とする.

C^∞-級曲線 : $c : (a,b) \to U_1$ について, $p = c(t_0)$ とおくと,

$$(d\varphi)_p(\dot{c}(t_0)) = (\varphi \dot{\circ} c)(t_0)$$

Thm 5.6 より

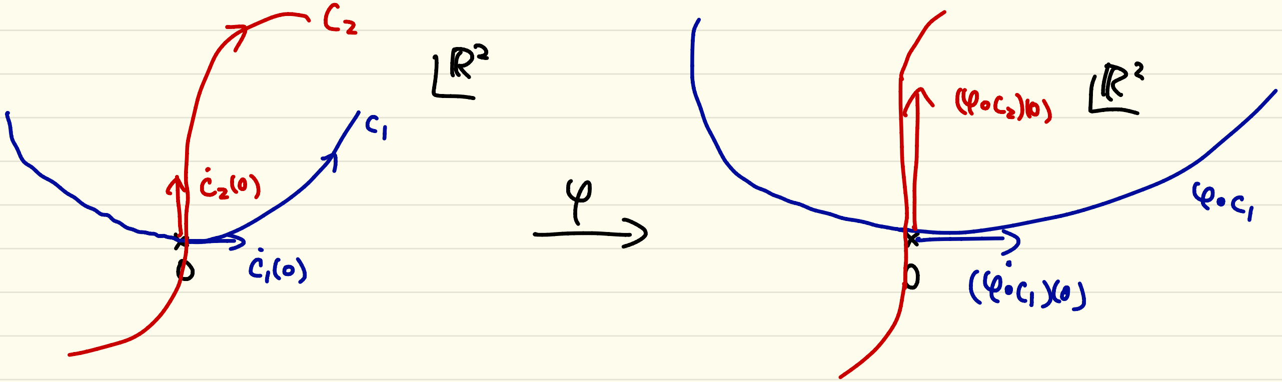
C^∞-級



Ex 5.22 $\quad n_1 = n_2 = 2 \quad U_1 = U_2 = \mathbb{R}^2$.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, C^∞-級写像 with $\varphi(0) = 0$ かつ $(J\varphi)_p = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

であるとする.



$(J\varphi)_p$ のデータから φ の 0 のまわりの様子が"分かる"

$\parallel$

$(d\varphi)_p$