講義前半予定

Part I

§1 イントロダクション

§2 C^∞-級関数

§3 方向微分

§4 ベクトル場

§5 C^∞-級写像と全微分

Part II

§6 局所座標と~~その貼り合わせ~~

§7 陰関数定理

↑ 中間ここまで

Part I でやった事

"$C^\infty(U)$" の言葉で

方向微分（接ベクトル）$\left(g : C^\infty(U) \to \mathbb{R}\text{, 線型, } p \in U \text{ における ライプニッツ則} \right)$

ベクトル場 $\left(X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)\text{, 線型, 場のライプニッツ則} \right)$

C^∞-級写像 $\left(\varphi : U_1 \to U_2,\ {}^\forall f \in C^\infty(U_2),\ \varphi^*(f) \in C^\infty(U_1) \right)$

C^∞-級写像の全微分 $\left(\begin{array}{l} (d\varphi)_p : T_p(U_1) \to T_{\varphi(p)}(U_2) \\ \qquad g \mapsto (d\varphi)_p(g) := g \circ \varphi^* \end{array} \right)$

は定義できる（座標を忘れても定義可能！）

これからやりたい事

M : 位相空間 とする (M すべてを記述する"座標"は期待できない)

㊍ $C^\infty(M)$ を定義したい!

⇝ "M 上"で, 方向微分, ベクトル場, C^∞級写像, 全微分

が定義できる!

アイデア

Part II の内容

① 局所的に"地図"を作る.

⇝ 地図上では"C^∞-性"が定義できる.

② 作った地図達の"整合性"を確認する.

⇝ M 上の"C^∞-性"が定義できる.

Part II : 局所座標

§6 : 局所座標 (今回)

§7 : 陰関数定理

§6 : 局所座標

内容 :
- 位相空間論のよく使う命題
- 局所座標
- 関数の局所座標上の C^∞-性

◎ よく使う命題の紹介

以下，$X = (X, \mathcal{O}_X)$，$Y = (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする.

部分集合 $A \subset X$ について $\mathcal{O}_X$ の定める A 上の相対位相を

$$\mathcal{O}_X(A) := \{ A \cap U \mid U \in \mathcal{O}_X \}$$

のように書く.

Prop 6.1 $B \subset A \subset X$ とする.

このとき

$$\underbrace{\mathcal{O}_X(B)}_{\mathcal{O}_X \text{ の定める相対位相}} = \underbrace{(\mathcal{O}_X(A))(B)}_{\mathcal{O}_X(A) \text{ の定める相対位相}}$$

（相対位相の相対位相は相対位相）

Prop 6.2 $U \in \mathcal{O}_X$ とする.

部分集合 $V \subset U$ について, 以下は同値

(i) $V \in \mathcal{O}_X(U)$ (相対位相について V は open in U)

$\Updownarrow$

(ii) $V \in \mathcal{O}_X$ (V は open in X)

(Rem: U が X の open set でない場合には同様の命題は成り立たない)

Prop 6.3 $\phi : X \to Y$: 同相写像とする (i.e. ϕ は全単射連続で 逆写像 $\phi^{-1} : Y \to X$ も連続)

このとき $\phi : X \to Y$ は開写像 (open map)

i.e. $\forall U \in \mathcal{O}_X,\ \phi(U) \in \mathcal{O}_Y$

Prop 6.4 : $A \subset X$, $B \subset Y$ とし，$\mathcal{O}_X(A)$, $\mathcal{O}_Y(B)$ について

A, B をそれぞれ位相空間とみなす.

(i) $\phi : X \to Y$ を連続写像とする.

$\phi(A) \subset B$ となるとき，

ϕ は A から B への写像としても連続

(ii) $\phi : X \to Y$ を同相写像とする.

$\phi(A) = B$ となるとき

ϕ は A から B への写像としても同相.

以降，位相を表す記号は表に出てないことも多いので注意.

@ 局所座標

設定： $M = (M, \mathcal{O}_M)$ ：位相空間
$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix.

Def 6.5 (局所座標系) （$O \subset M$ の "n次元地図"）

$\emptyset \neq O \subset M$: open, $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$: open とし,
$x : O \to U$ とする.

組 (O, U, x) が M の n次元局所座標系であるとは
$x : O \to U$ が同相写像であること.

ただし O, U の位相はそれぞれ,
M の位相, $\mathbb{R}^n$ の標準位相 の定める相対位相とする.

Ex 6.6 (自明な例)

$M = U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ のとき
$\;\;\;\;\not\parallel$
$\;\;\;\;\emptyset$

(U, U, id_U) は M 上の局所座標

"open" でない事に注意

Ex 6.7: $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を fix

$$S^n := \{ x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とおく.

$\mathbb{R}^{n+1}$ の標準位相の定める相対位相により

S^n を位相空間とみなす. (S^n は連結, コンパクト, ハウスドルフ)

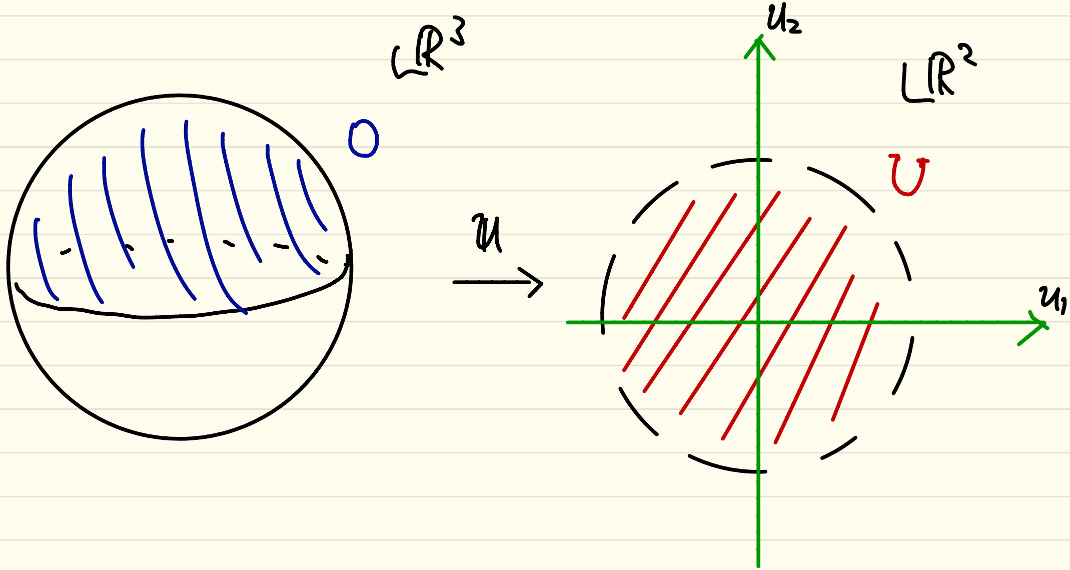
$$O := \{ x \in S^n \mid x_{n+1} > 0 \} \subset S^n,$$

$$U := \{ u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1 \} \subset \mathbb{R}^n$$ とし

$u : O \to U,\ x \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$ とおく.

(x は S^n の定義に使ったので "x" は使わない)

イメージ　$n=2$ の場合



小テスト

Claim : このとき (O, U, u) は S^n の n 次元局所座標系

Proof : 示 ① $O \neq \emptyset$, $O \subset S^n$: open

② $U \neq \emptyset$, $U \subset \mathbb{R}^n$: open

③ $u : O \to U$ は well-defined (i.e. $\forall x \in O$, $(x_1 \cdots x_n) \in U$) で同相写像.

① を示す : $(0, \cdots, 0, 1) \in O$ より $O \neq \emptyset$

$O = S^n \cap \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} > 0\}}_{\text{open in } \mathbb{R}^{n+1}}$ より O : open in S^n

② を示す : $U \ni (0, \cdots, 0)$ より $U \neq \emptyset$

U は $\mathbb{R}^n$ の標準距離について $(0, \cdots, 0)$ 中心の 1-近傍 なので

U : open in $\mathbb{R}^n$ (通論Iでやった)

③を示す: まず $u : O \to U$ が well-defined であることを示す.

$$x \mapsto (x_1 \cdots x_n)$$

示 $\forall x \in O,\ (x_1 \cdots x_n) \in U$

$\forall x \in O$ をとる.

示 $(x_1, \cdots, x_n) \in U$, i.e. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1$

$x \in O$ より $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ かつ $x_{n+1} > 0$ である.

従って $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 - x_{n+1}^2 < 1$.

これで $u : O \to U$ が well-defined であることが示された

最後に $u : O \to U$ が同相写像であることを示そう。

まず $u^{-1} : U \to O,\quad (u_1, \cdots, u_n) \mapsto \left(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1-\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)}\right)$

とおくと、これは u の逆写像である

示 $u^{-1} \circ u = id_O$

$u \circ u^{-1} = id_U$ （省略）

u と u^{-1} の連続性を示せばよい

$u: O \to U$ の連続性を示す.

以下を示せば十分 ($\because$ Prop 6.1, Prop 6.4 (i))

示) $\exists \tilde{u} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$: 連続 s.t. $\tilde{u}|_O = u$

$\tilde{u} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$ とする.

各成分は多項式関数なので $\tilde{u}$ は C^∞-級写像 ($\mathbb{R}^{n+1}$ はユークリッド空間なので C^∞-性が定義できる)

特に $\tilde{u}$ は連続

また定義から $\tilde{u}|_O = u$

■

次に $\pi^{-1}: U \to O$ の連続性を示す.

以下を示せば十分 (∵ Prop 6.4 (i))

(示) $\exists \tilde{\pi}^{-1}: U \to \mathbb{R}^{n+1}$: 連続 s.t. $\tilde{\pi}^{-1}(u) = \pi^{-1}(u)$ ($\forall u \in U$)

$$\tilde{\pi}^{-1}: U \to \mathbb{R}^{n+1},\quad (u_1, \cdots, u_n) \mapsto \left(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)$$

とおくと, 各成分が C^∞-級関数 (Ex 2.7 を使った)

なので $\tilde{\pi}^{-1}$ は C^∞-級写像. 特に連続.

また定義から $\tilde{\pi}^{-1}(u) = \pi^{-1}(u)$ ∎

Def 6.8

$LC(M;\mathbb{R}^n) := \{(O, U, x) \mid M$ 上の n 次元局所座標系 $\}$

とおく.

(この講義の独自記号なので注意)

Prop 6.9

$(O, U, x) \in LC(M;\mathbb{R}^n)$ とする.

また $\emptyset \neq O_0 \underset{\text{open}}{\subset} O$ を fix.

このとき

$$(O_0, x(O_0), x|_{O_0} : O_0 \to x(O_0)) \in LC(M;\mathbb{R}^n)$$

Prop 6.9 の証明

示
① $O_0 \neq \emptyset$ かつ $O_0 \subset M$: open
② $x(O_0) \neq \emptyset$ かつ $x(O_0) \subset \mathbb{R}^n$: open
③ $x|_{O_0} : \underbrace{O_0}_{M\text{からの相対位相}} \to \underbrace{x(O_0)}_{\mathbb{R}^n\text{からの相対位相}}$ は同相写像.

①を示す: まず仮定より $O_0 \neq \emptyset$.
また $O_0 \subset O$: open で $O \subset M$: open より $O_0 \subset M$: open
($\because$ Prop 6.2)

これで①が示された.

②を示す: ①より $O_0 \neq \emptyset$. 従って $\varkappa(O_0) \neq \emptyset$.

以下を示そう:

㊡ $\varkappa(O_0) \subset \mathbb{R}^n$: open

いま $\varkappa : O \to U$ は同相写像なので，特に開写像 ($\because$ Prop 6.3)

従って $\varkappa(O_0) \subset U$: open

いま $U \subset \mathbb{R}^n$: open なので $\varkappa(O_0) \subset \mathbb{R}^n$: open ($\because$ Prop 6.2)

これで②が示された.

③を示す： 示 $\pi|_{O_0} : \underset{\substack{\uparrow \\ M\text{からの相対位相}}}{O_0} \to \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^n\text{からの相対位相}}}{\pi(O_0)}$ は同相写像.

O_0 の位相は O からの相対位相とみなしてよく,

$\pi(O_0)$ の位相は U からの相対位相とみなしてよい ($\because$ Prop 6.1)

いま $\pi : O \to U$ は同相写像なので

$\pi|_{O_0} : O_0 \to \pi(U)$ も同相写像である.

($\because$ Prop 6.4)

これで③が示された

∎

Def 6.10: $p \in M$, $(O, U, x) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$ とする.

$p \in O$ となるとき

(O, U, x) を p のまわりの n次元 局所座標系、という

Ex 6.11: Ex 6.7 の設定において

$p = (0, \cdots, 0, 1) \in S^n$ とおくと,

(O, U, u) は p のまわりの n 次元局所座標

◎ 関数の局所座標上の C^∞-性

設定： $M = (M, \mathcal{O}_M)$ ：位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(O, U, x) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$ を fix.

Def 6.12

M の位相で定義可能

$C^0(M) := \{ f : M \to \mathbb{R} \mid f$ は連続 $\}$ とおく.

Prop 6.13 $C^0(M)$ は関数の和，スカラー倍，積について可換かつ結合的な $\mathbb{R}$-代数となる.

Def 6.15 : 連続関数 $f: M \to \mathbb{R}$ が

(O, U, φ) 上 C^∞-級 であるとは

$f \circ \varphi^{-1} : U \to \mathbb{R}$ が C^∞-級関数 であること.

$U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

(この講義の独自の言い方なので注意)

Ex. 6.17 : Ex 6.9 の設定で考える.

$$f : S^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{とおく.}$$

$$x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \longmapsto x_{n+1}$$

Claim : $f : S^n \to \mathbb{R}$ は (O, U, u) 上 C^∞-級

示 ① $f : S^n \to \mathbb{R}$ は連続

② $f \circ u^{-1} : U \to \mathbb{R}$ は C^∞-級

$U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

① を示す：$\hat{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_{n+1}$ は多項式関数なので連続

いま $f = \hat{f}|_{S^n}$ より f も連続（∵ Prop 6.X (i)）

② を示す：$f \circ u^{-1} : U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$

$$(u_1, \cdots, u_n) \longmapsto f\left(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right) = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

に注意する.

$g : U \to \mathbb{R},\ (u_1, \cdots, u_n) \mapsto 1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2$

$h : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \sqrt{t}$

は共に C^∞-級であり

$U = U \cap g^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$ に注意すると $f \circ u^{-1} = h \circ g : U \to \mathbb{R}$ も C^∞-級

□

Def 6.17 各 $(O, U, \pi) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ について

$$C^\infty(M; (O, U, \pi)) := \{ f \in C^0(M) \mid f \text{ は } (O, U, \pi) \text{ 上 } C^\infty\text{-級} \}$$

とおく

Prop 6.18 各 $(O, U, \pi) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ について

$C^\infty(M; (O, U, \pi))$ は $C^0(M)$ の部分 $\mathbb{R}$-代数.

(i.e. 線型部分空間であり,

$\forall f, g \in C^\infty(M; (O, U, \pi))$, $f \cdot g \in C^\infty(M; (O, U, \pi))$)