前回　§6　局所座標

今回　§7　陰関数定理と正則局所座標系

中間試験範囲は今回まで.

§7 陰関数定理と正則局所座標系

内容　◎ 正則局所座標系

　　　◎ 陰関数定理

@ 正則局所座標系

設定 : $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix.　　特殊な位相空間

$$\left[\begin{array}{l} \underline{S \subset \mathbb{R}^{n+k}} \\ p \in S \end{array}\right.$$

: open とは限らない を fix

記号 : $LC(S;\mathbb{R}^n) := \{ (O, U, u) \mid S$ 上の n 次元局所座標系 $\}$

$\mathbb{R}^n := \{ (u_1, \cdots, u_n, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^{n+k} \mid u_i \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ 線型部分空間 とみなす.

Def 7.1 $(O, U, u) \in LC(S:\mathbb{R}^n)$ が 正則 であるとは

以下を満たすこと：

(すごく使いやすい局所座標系)

$\exists \tilde{O} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k}$, $\exists \tilde{U} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k}$

$\exists \phi : \tilde{O} \to \tilde{U}$: C^∞-diffeo (i.e. ϕ は全単射で ϕ, ϕ^{-1} は共に C^∞-級写像)

s.t.
$$\begin{cases} \tilde{O} \cap S = O \\ \tilde{U} \cap \mathbb{R}^n = U \\ \phi|_O = u \end{cases}$$

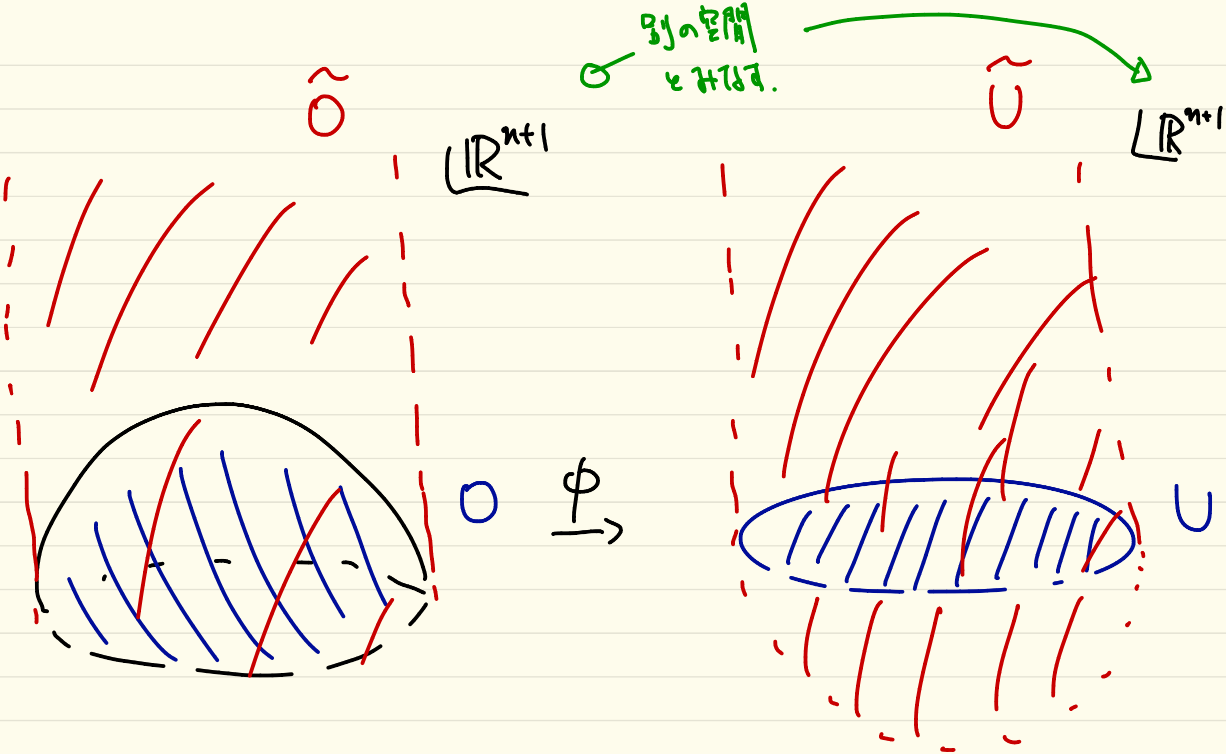
Ex 7.2 : Ex 6.7 で与えた (O, U, u) は正則

Hint : $k=1$, $\tilde{O} = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1,\ x_{n+1} > 0 \}$ 円柱の一部

$\tilde{U} = \{ u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1,\ u_{n+1} + \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2} > 0 \}$

$\phi : \tilde{O} \to \tilde{U},\ x \mapsto \left(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1} - \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right)$

$\phi^{-1} : \tilde{U} \to \tilde{O},\ u \mapsto \left(u_1, \cdots, u_n, u_{n+1} + \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2} \right)$



$\tilde{O}$
$\mathbb{R}^{n+1}$
O
ϕ
別の空間
とみなす.
$\tilde{U}$
$\mathbb{R}^{n+1}$
U

Prop 7.3 (O, U, u) : S 上の正則な n 次元局所座標系とする.

$S \subset D \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k}$ とし

$f : D \to \mathbb{R}$: C^∞-級とする.

このとき $f|_S \in C^\infty(S; (O, U, u))$

◎ 陰関数定理

設定：　$n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix

$\varphi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$: C^α-級写像

$q \in \mathbb{R}^k$　を fix

記号：　$\pi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k,\ u \mapsto (u_{n+1}, \cdots, u_{n+k})$: 射影

$S_q := \varphi^{-1}(q)$　$(:= \{ x \in \mathbb{R}^{n+k} \mid \varphi(x) = q \})$

$\subset \mathbb{R}^{n+k}$

open
とは限らない

Ex 7.4

$k=1$, $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ とすると

$$S_1 := \varphi^{-1}(1) = S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Theorem 7.5（陰関数定理の系）

$p \in S_q$ を fix

$(d\varphi)_p : T_p\mathbb{R}^{n+k} \to T_q\mathbb{R}^k$ が全射とする.

φ は局所的に π にみえる

仮定

$\left(\Leftrightarrow (J\varphi)_p \text{ のランクが } k \right)$

このとき以下が成り立つ：

$\exists\, \hat{O} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k}$ with $p \in \tilde{O}$ and $\varphi(\hat{O})$: open in $\mathbb{R}^k$

$\exists\, \hat{U} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k}$ with $0 \in \tilde{U}$ （$\pi(\hat{U})$ は open in $\mathbb{R}^k$）

$\exists\, \phi : \hat{O} \to \hat{U}$: C^∞-diffeo with $\phi(p) = 0$

$\exists\, \psi : \varphi(\hat{O}) \to \pi(\hat{U})$: C^∞-diffeo

s.t. $\psi \circ \varphi = \pi \circ \phi$ on $\hat{O}$

図式

$$\begin{tikzcd} \hat{O} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \varphi(\hat{O}) \arrow[d] \\ \hat{U} \arrow[r, "\pi"] & \pi(\hat{U}) \end{tikzcd}$$

in $\mathbb{R}^{n+k}$　　in $\mathbb{R}^k$

（証明略）

Ex 7.6: $n = k = 1$, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1^2 + x_2^2$

$q = 1 \in \mathbb{R}$

$p = (1, 0) \in S_q$ とする.

$$(J\varphi)_p = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(p), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(p) \right) = (2p_1, 2p_2) = (2, 0)$$

ランク 1 $(= k)$

(Thm 7.4 の仮定を満たす)

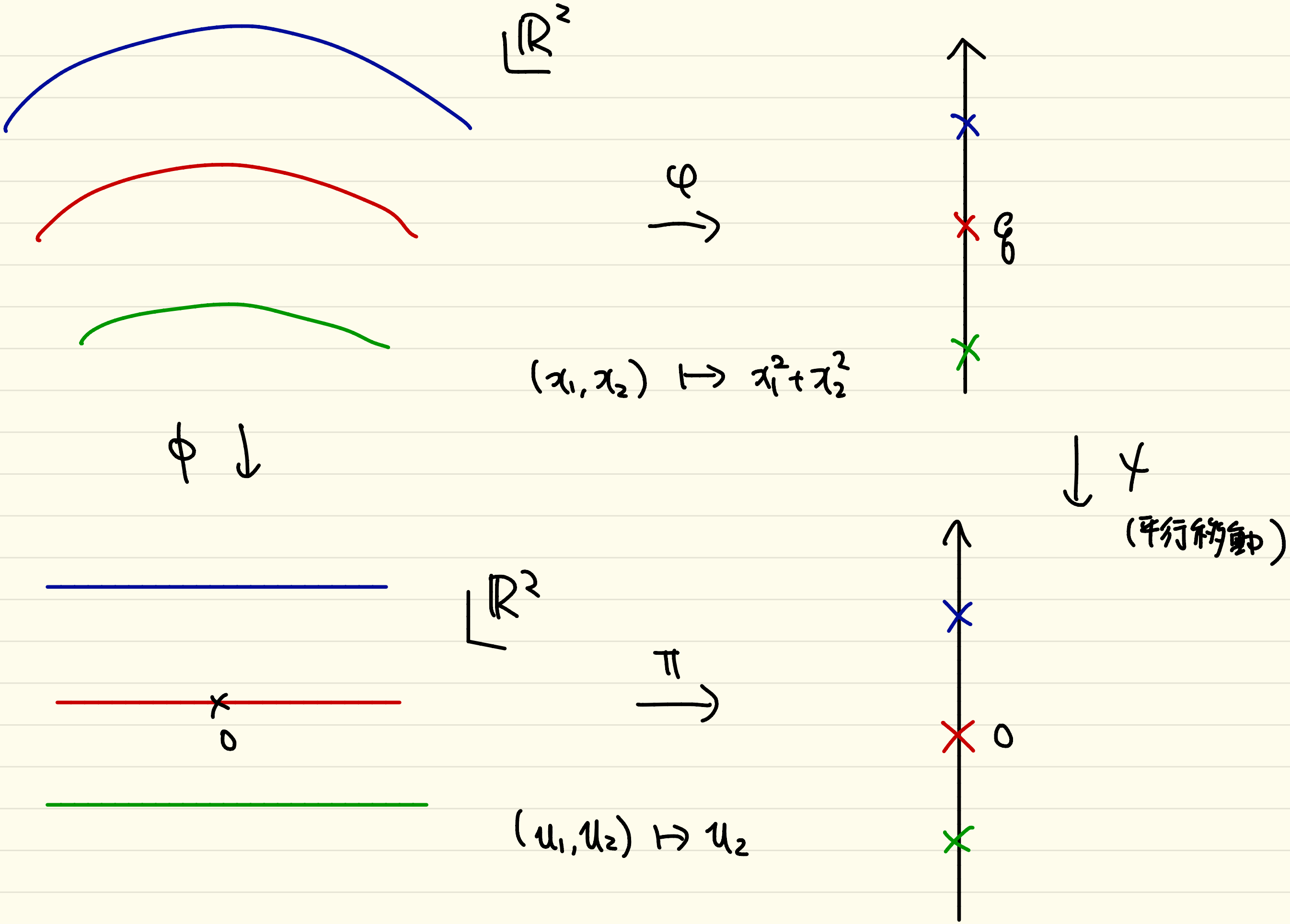
このとき例えば

$$\tilde{O} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0 \} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^2$$

$$\tilde{U} = \{ u \in \mathbb{R}^2 \mid u_2 > u_1^2 - 1 \} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^2$$

$$\phi : \tilde{O} \to \tilde{U}, \quad x \mapsto (x_1, x_1^2 + x_2^2 - 1)$$ ととる.

$$\psi : \underset{(0,\infty)}{\underset{\parallel}{\varphi(\tilde{O})}} \to \underset{(-1,\infty)}{\underset{\parallel}{\pi(\tilde{U})}}, \quad \alpha \mapsto \alpha - 1$$



$\mathbb{R}^2$
φ
c_0
$(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$
ϕ
ψ
(平行移動)
$\mathbb{R}^2$
π
0
0
$(u_1, u_2) \mapsto u_2$

Prop 7.7 :

$p \in S_q$ を fix

$(d\varphi)_p : T_p\mathbb{R}^{n+k} \to T_q\mathbb{R}^k$ が全射 とする.

仮定

($\Leftrightarrow$ $(J\varphi)_p$ のランク が k)

このとき S_q ($\subset \mathbb{R}^{n+k}$) 上の

p のまわり の 正則な局所座標系 が存在する.

Prop 7.7 の証明： 示 $^\exists(O, U, \mathcal{U}) \in LC(S_g ; \mathbb{R}^n)$

s.t. $p \in O$ and $(O, U, \mathcal{U})$ は正則

Thm 7.5 より

$$\begin{cases} \tilde{\hat{O}} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k} \text{ with } p \in \tilde{O} \text{ and } \varphi(\tilde{\hat{O}}) : \text{open in } \mathbb{R}^k \\ \tilde{\hat{U}} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k} \text{ with } 0 \in \tilde{U} \qquad (\pi(\tilde{\hat{U}}) \text{ は open in } \mathbb{R}^k) \\ \phi : \tilde{\hat{O}} \to \tilde{\hat{U}} : C^\infty\text{-diffeo with } \phi(p) = 0 \\ \psi : \varphi(\tilde{\hat{O}}) \to \pi(\tilde{\hat{U}}) : C^\infty\text{-diffeo} \end{cases}$$

であって $\psi \circ \varphi = \pi \circ \phi$ on $\tilde{\hat{O}}$ となるものがとれる.

$O := \tilde{O} \cap S_q$

$U := \hat{U} \cap \mathbb{R}^n$ $\qquad \left(\mathbb{R}^n := \overset{\operatorname{Ker}\pi}{\overset{\shortparallel}{\{(u_1, \dots, u_n, 0, \dots, 0) \mid u_i \in \mathbb{R}\}}} \subset \mathbb{R}^{n+k} \right)$

とおく.

Lemma A : $\phi(O) \subset U$

Proof of Lemma A : $^\forall x \in O$ をとる.

(示) $\phi(x) \in U$ i.e. $\pi(\phi(x)) = 0$

いま $\pi \circ \phi = \psi \circ \varphi$ on $\hat{O}$ より

$\pi(\phi(x)) = \psi(\varphi(x))$ である.

$\varphi(x) = q$ より $\pi(\phi(x)) = \psi(q) = \psi(\phi(p)) = \pi(\varphi(p))$

$= \pi(0) = 0$

∎

$u := \phi|_O : O \to U$ とおく.

$p \in O = \hat{O} \cap S_g$ は定義より明らか.

以下を示せばよい.

Claim: (O, U, u) は S_g 上の正則な n 次元座標近傍

(以下略: Hint: $\hat{O}$, $\tilde{U}$ はそのまま使える.
"$\phi(O) = U$" を示す必要がある.)