講義全体の流れ（予定）

Part I　多変数関数の微分

Part II　局所座標

Part III　可微分多様体

今回から Part III

§8　座標変換

§9　可微分多様体

§10　多様体上の C^∞-級関数の構成（スキップするかも）

§11　接空間，ベクトル場

Part IV　多様体の間の写像

§12　C^∞-級写像

§13　部分多様体

§8 座標変換

内容：　@ 座標変換
　　　　@ 射影空間の例

多様体論の難所：
① 接空間
② C^∞-級写像とその微分
③ 座標変換
④ 極大 atlas

新しい視点なので難しい（もうやった）

ややこしいだけ（訓練あるのみ）

地図同士の整合性 → ③

地図セットのアフターケア → ④

@ 座標変換

設定： M ： 位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix

$(O, U, x), (O', V, y) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$

with $O \cap O' \neq \emptyset$ を fix

ただし

$LC(M; \mathbb{R}^n) := \{ (O, U, x) \mid M$ 上の n 次元局所座標系 $\}$

とおいた.

$$x(O\cap O') \underset{\text{open}}{\subset} U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$$

$$y(O\cap O') \underset{\text{open}}{\subset} V \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$$ に注意

Def 8.1 (座標変換)

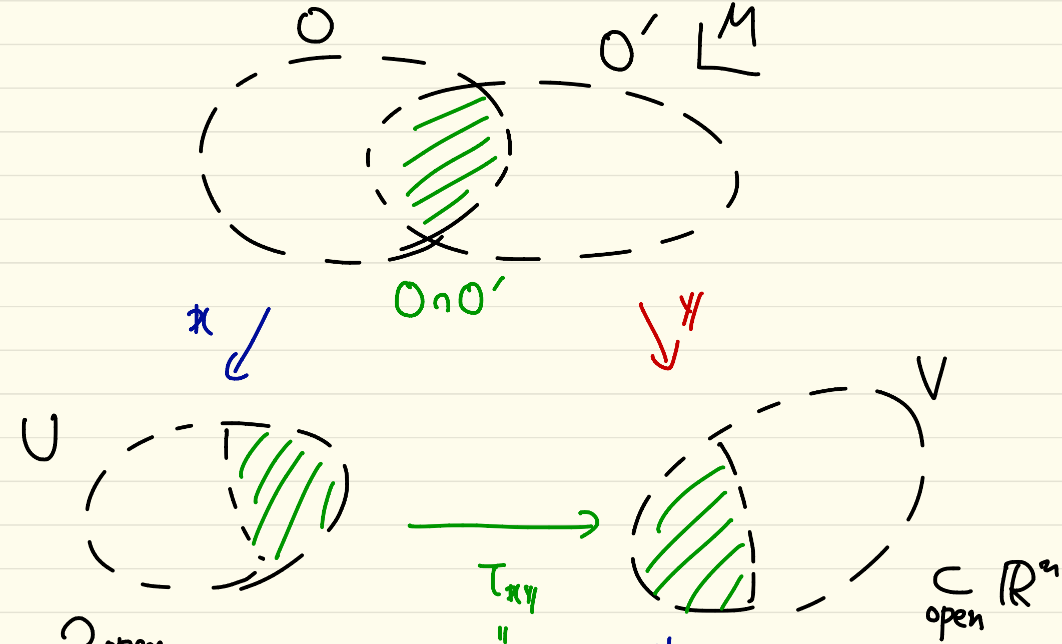
"2枚の地図を見比べる"

$$\tau_{xy} : \underset{\text{open}}{\underbrace{x(O\cap O')}_{\subset\, \mathbb{R}^n}} \to \underset{\text{open}}{\underbrace{y(O\cap O')}_{\subset\, \mathbb{R}^n}}$$

$$x \mapsto y(x^{-1}(x))$$

$$\left(\text{i.e. } \tau_{xy} : (y|_{O\cap O'}) \circ (x|_{O\cap O'})^{-1} \right)$$

を (O, U, x) から (O', V, y) への座標変換という.



$$T_{xy} = \left(y|_{O\cap O'}\right) \circ \left(x|_{O\cap O'}\right)^{-1}$$

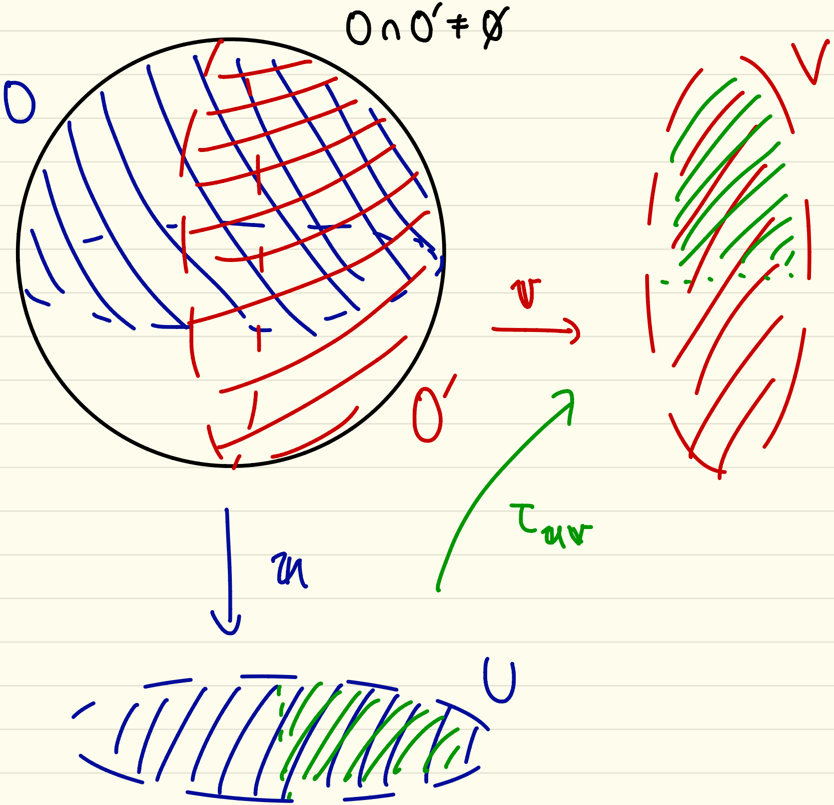
この絵は丸暗記おすすめ

Ex 8.2 : $n = 2$ とする.

$$S^2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1 \}$$

$$\left\{ \begin{aligned} O &= \{ x \in S^3 \mid x_3 > 0 \} \\ U &= \{ u \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^{2} u_i^2 < 1 \} \\ \mathfrak{u} &: O \to U, \quad x \mapsto (x_1, x_2) \end{aligned} \right. \qquad \rightsquigarrow \quad (O, U, \mathfrak{u}) \in LC(S^2; \mathbb{R}^n)$$

$$\left\{ \begin{aligned} O' &= \{ x \in S^3 \mid x_2 > 0 \} \\ V &= \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^{2} v_i^2 < 1 \} \\ \mathfrak{v} &: O' \to V, \quad x \mapsto (x_1, x_3) \end{aligned} \right. \qquad \rightsquigarrow \quad (O', V, \mathfrak{v}) \in LC(S^2; \mathbb{R}^n)$$



$O \cap O' \neq \emptyset$
O
O'
v
V
u
U
τ_{uv}

$$
\begin{array}{ccccc}
u(O \cap O') & \xrightarrow{u^{-1}} & O \cap O' & \xrightarrow{v} & v(O \cap O') \\
\| & & \| & & \| \\
\left\{ u \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} u_1^2 + u_2^2 < 1 \\ u_2 > 0 \end{array} \right\} & & \{ x \in S^2 \mid x_2 > 0,\ x_3 > 0 \} & & \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} v_1^2 + v_2^2 < 1 \\ v_2 > 0 \end{array} \right\}
\end{array}
$$

$$\cap_{\text{open}}\ \mathbb{R}^2 \qquad\qquad\qquad \text{open} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\left\{ u \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} u_1^2 + u_2^2 < 1 \\ u_2 > 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\tau_{uv}} \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} v_1^2 + v_2^2 < 1 \\ v_2 > 0 \end{array} \right\}$$

$$u \longmapsto v(u^{-1}(u)) = \left(u_1, \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}\right)$$

注：

$$u^{-1} : U \to O, \quad u = (u_1, u_2) \mapsto \left(u_1, u_2, \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}\right)$$

$$v : O' \to V, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3)$$

一般の設定に戻る

<u>Prop 8.3</u>：座標変換

$$\tau_{\varphi\psi} : \varphi(O \cap O') \to \psi(O \cap O')$$

open $\subset \mathbb{R}^n$　　open $\subset \mathbb{R}^n$

は同相写像.

また　$\tau_{\varphi\psi} : \varphi(O\cap O') \to \psi(O \cap O')$ の逆写像は

$$\tau_{\psi\varphi} : \psi(O\cap O') \to \varphi(O\cap O')$$

Q：座標変換はいつでも C^∞-diffeo？

($\Leftrightarrow$ $\tau_{\varphi\psi}$, $\tau_{\psi\varphi}$ が共に C^∞-級)

A：No.

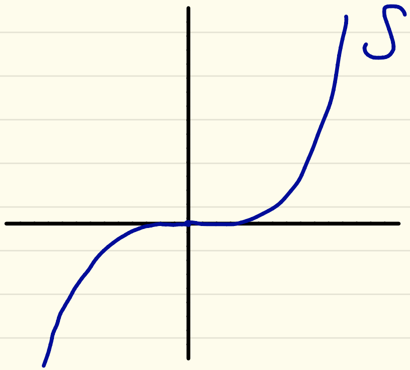
Ex 8.4: $S = \{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^3 \} \subset \mathbb{R}^2$

$\begin{cases} O = S \\ U = \mathbb{R} \\ u : O \to U,\ x \mapsto x_1 \end{cases}$ $\rightsquigarrow (O, U, u) \in LC(S;\mathbb{R})$

$(u^{-1} : U \to O,\ u \mapsto (u, u^3))$

$\begin{cases} O' = S \\ V = \mathbb{R} \\ v : O' \to V,\ x \mapsto x_2 \end{cases}$ $\rightsquigarrow (O, V, v) \in LC(S;\mathbb{R})$

$(v^{-1} : V \to O,\ v \mapsto (v^{1/3}, v))$



このとき $O \cap O' = S,\quad u(O \cap O') = \mathbb{R},\quad v(O \cap O') = \mathbb{R}$

$T_{uv} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u \mapsto v(u^{-1}(u)) = u^3$ ← C^∞-級

$T_{vu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ v \mapsto u(v^{-1}(v)) = v^{1/3}$ ← C^∞-級ではない!

キーポイント：座標変換が C^∞-diffeo だとうれしい！

理由

注：$(O\cap O', x(O\cap O'), x|_{O\cap O'})$, $(O\cap O', y(O\cap O'), y|_{O\cap O'}) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$

($\because$ Prop 6.9)

$\Downarrow$

Prop 8.5 $(O,U,x),(O',V,y) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ with $O\cap O' \neq \emptyset$ について

小テスト

座標変換 τ_{xy}, τ_{yx} が C^∞-diffeo とする.

このとき $f\in C^0(M)$ について以下は同値

(i) f は $(O\cap O', x(O\cap O'), x|_{O\cap O'})$ と C^∞-級

$\Updownarrow$

(ii) f は $(O\cap O', y(O\cap O'), y|_{O\cap O'})$ と C^∞-級

Prop 8.5 の証明　(i) ⇒ (ii) を示す.

(i) を仮定する. (ii) を示そう

示　$f \circ (\psi|_{O \cap O'})^{-1} : \psi(O \cap O') \to \mathbb{R}$ は C^∞-級

以下を示せば十分

示　$f \circ (\psi|_{O \cap O'})^{-1}$ は C^∞-級写像と C^∞-級関数の合成で書ける

いま　$f \circ (\psi|_{O \cap O'})^{-1} = f \circ (\varphi|_{O \cap O'})^{-1} \circ (\varphi|_{O \cap O'}) \circ (\psi|_{O \cap O'})^{-1}$

$$= \left(f \circ (\varphi|_{O \cap O'})^{-1}\right) \circ \tau_{\psi\varphi}$$

as $\psi(O \cap O') \to \mathbb{R}$

ここで $\tau_{\psi\varphi}$ は C^∞-級（設定）であり，

(i) の仮定より $f\circ(\varphi|_{O\cap O'})^{-1}$ も C^∞-級.

従って $f\circ(\psi|_{O\cap O'})^{-1}$ も C^∞-級

これで (ii) が示された.

(ii) $\Rightarrow$ (i) も同様

□

便利な定理

設定： $S \subset \mathbb{R}^{n+k}$ $(n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ とする.

$(O, U, u), (O', V, v) \in LC(S; \mathbb{R}^n)$

with $\begin{cases} O \cap O' \neq \emptyset \\ \text{両方とも } \mathbb{R}^{n+k} \text{内で正則} \end{cases}$ を fix

Theorem 8.6： 上の設定で

座標変換 τ_{uv}, τ_{vu} は共に C^∞-diffeo.

応用例： Ex 8.2 の例は τ_{uv}, τ_{vu} は共に C^∞-diffeo

(cf. Ex 7.2)

@ 射影空間の例 (Thm 8.6 では説明できない例)

設定: $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix

記号: $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の同値関係 $\sim$ を以下で定める:

$$x \sim y \ (\text{in } \mathbb{R}^{n+1}) \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\exists \lambda \in \mathbb{R}^\times,\ \lambda x = y$$

Def 8.7 $\quad P(\mathbb{R}^{n+1}) := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ とおいて

(P$\mathbb{R}^n$ とも書く) 商位相により位相空間とみなす.

@ $P(\mathbb{R}^{n+1})$ はユークリッド空間の部分集合とは考えない.

記号：各 $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ について

$$[x] := \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}^\times\} \in P(\mathbb{R}^{n+1})$$ とおく.

x の同値類

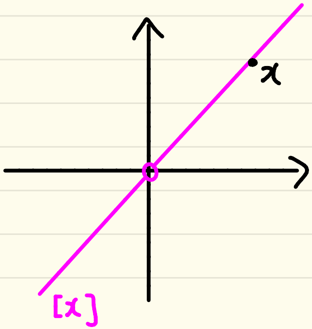
$[x] = [(x_1, \cdots, x_n)]$ を $[x_1 : x_2 : \cdots : x_n]$ とも書く.

$\in P(\mathbb{R}^n)$

(
$[x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}] = [y_1 : y_2 : \cdots : y_{n+1}]$

$\Longleftrightarrow {}^\exists \lambda \in \mathbb{R}^\times$ s.t. $\lambda x_1 = y_1, \cdots, \lambda x_{n+1} = y_{n+1}$

に注意.
)



Prop 8.8 : $P(\mathbb{R}^{n+1}) \xrightarrow{1:1} \{\mathbb{R}^{n+1}$ の 1次元部分空間$\}$

$[x] \longmapsto \underbrace{\{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}_{x \text{ と } 0 \text{ を通る直線 in } \mathbb{R}^{n+1}} = [x] \cup \{0\}$

集合 $\{\mathbb{R}^{n+1}$ の 1次元部分空間$\}$ に

自然な位相を入れたものが

$P(\mathbb{R}^{n+1})$ であると思ってよい.

記号：

$LC(P(\mathbb{R}^{n+1});\mathbb{R}^n) := \{\ P(\mathbb{R}^{n+1})$ 上の n 次元局所座標系 $\}$

注意： $P(\mathbb{R}^{n+1})$ はユークリッド空間の部分集合と考えていないので

各 $(O, U, u) \in LC(P(\mathbb{R}^{n+1});\mathbb{R}^n)$ について

"正則か否か" は定義されてない

(Def 7.1 の意味で)

Ex 8.9 : 各 $i = 1, \cdots, n+1$ について

$$O_i := \{ [x] \in P(\mathbb{R}^{n+1}) \mid x \in \mathbb{R}^{n+1}, \ x_i \neq 0 \}$$

$$U_i := \mathbb{R}^n$$

← x_i をスキップする.

$$u^i : O_i \to U_i, \ [x] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \cdots \overset{x_i}{\vee} \cdots, x_{n+1})$$

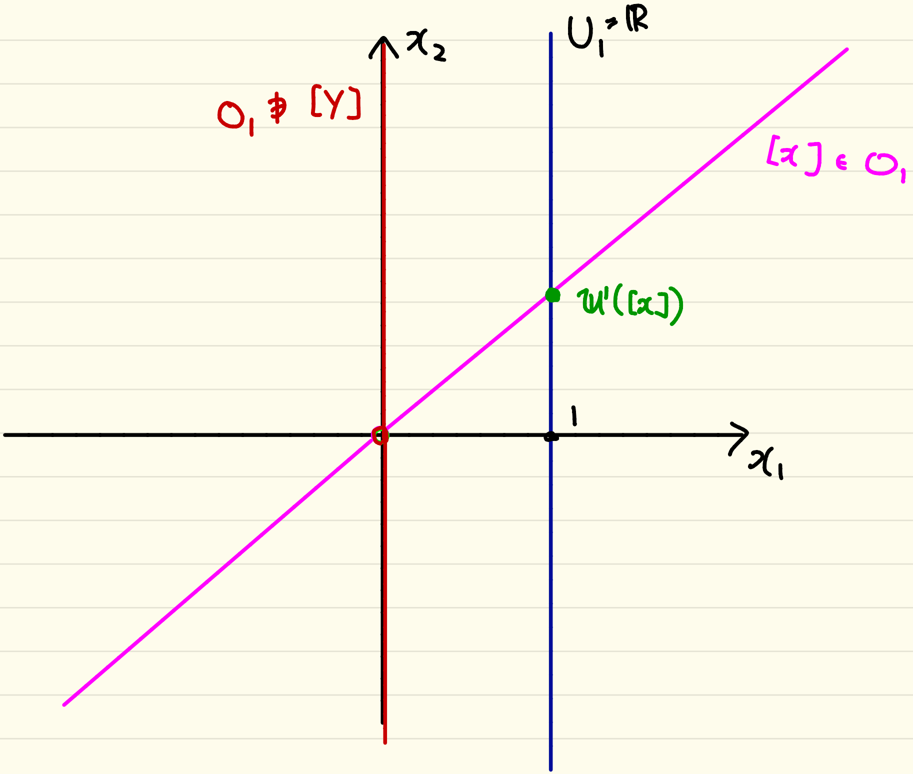
$$= \frac{1}{x_i}(x_1, \cdots x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$$

(いろんな事情で u_i とは書かないことにする)

とおくと $(O_i, U_i, u^i) \in LC(P(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbb{R}^n)$.

(Hint: $(u^i)^{-1} : U_i \to O_i, \ u^i = (u^i_1, \cdots u^i_n) \mapsto [u^i_1, \cdots u^i_{i-1}, 1, u^i_i, \cdots, u^i_n]$)

$n=1$ の場合のイメージ



(一般の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の設定に戻る)

$1 \leq i \lneq j \leq n+1$ とする.

(O_i, U_i, u^i) から (O_j, U_j, u^j) への座標変換を簡単のため

$$\tau_{ij} : u^i(O_i \cap O_j) \longrightarrow u^j(O_i \cap O_j)$$ と書く.

$$u^i(O_i \cap O_j) = \{ u^i = (u^i_1, u^i_2, \cdots, u^i_n) \in \mathbb{R}^n \mid u^i_{j-1} \neq 0 \}$$

$$u^j(O_i \cap O_j) = \{ u^j = (u^j_1, \cdots, u^j_n) \in \mathbb{R} \mid u^j_i \neq 0 \}$$

$$u^i = (u^i_1, \cdots, u^i_n) \xmapsto[\tau_{ij}]{} \frac{1}{u^i_{j-1}} (u^i_1, \cdots u^i_{i-1}, 1, u^i_i, \cdots u^i_{j-2}, u^i_j, \cdots, u^i_n)$$

τ_{ij} は C^∞-級

(ほぼ同様に τ_{ji} も C^∞-級)