講義全体の流れ（予定）

Part I 多変数関数の微分

Part II 局所座標

Part III 可微分多様体

§8 座標変換

§9 可微分多様体 ← 今回

§10 多様体上の C^∞-級関数の構成（スキップするかも）

§11 接空間，ベクトル場

Part IV 多様体の間の写像

§12 C^∞-級写像

§13 部分多様体

§9 可微分多様体

やりたい事：位相空間 M について

M 上の"地図セット"を用意して

"M 上の C^∞-級関数"を定義したい．

内容：

- C^∞-級関数，C^∞-級写像の局所性
- C^∞-atlas，C^∞-atlas 上の C^∞-級関数
- 極大 C^∞-atlas
- C^∞-級多様体

◎ C^∞-級関数, C^∞-級写像の局所性

設定 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\emptyset \neq U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: U の open cover with $U_\lambda \neq \emptyset$ ($\forall \lambda$)

を fix

① 各 $\lambda \in \Lambda$ について $U_\lambda \underset{\text{open}}{\subset} U$

かつ

② $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = U$

Prop 9.1 : 関数 $f : U \to \mathbb{R}$ について以下は同値

(i) f は C^∞-級 (i.e. $f \in C^\infty(U)$)

$\Updownarrow$

(ii) 各 $\lambda \in \Lambda$ について制限

$$f|_{U_\lambda} : U_\lambda \to \mathbb{R}$$

は C^∞-級 (i.e. $\forall \lambda \in \Lambda$, $f|_{U_\lambda} \in C^\infty(U_\lambda)$)

設定 $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\emptyset \neq U_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_i} \quad (i=1,2)$

$\{U_{1,\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$: U_1 の open cover with $U_{1,\lambda} \neq \emptyset \ ({}^\forall\lambda)$
を fix

Prop 9.2 写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ について以下は同値

(i) $\varphi : U_1 \to U_2$ は C^∞-級写像.

$\Updownarrow$

(ii) 各 $\lambda \in \Lambda$ について $\varphi|_{U_{1,\lambda}} : U_{1,\lambda} \to U_2$ は C^∞-級写像.

◎ C^∞-atlas

設定：M：位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix

記号：$LC(M;\mathbb{R}^n) = \{(O, U, x) \mid M$上の$n$次元局所座標$\}$

とおいた.

地図セット

Def. 9.3 $A_0 \subset LC(M;\mathbb{R}^n)$ が M上のn次元 C^∞-atlas

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $\displaystyle\bigcup_{(O,U,x)\in A_0} O = M$ (i.e. $\{O\}_{(O,U,x)\in A_0}$ が M の open cover)

かつ (ii) $\forall (O,U,x), (O',V,y) \in A_0$ with $O \cap O' \neq \emptyset$,

A_0の地図同士は整合的

$T_{xy} : x(O\cap O') \to y(O \cap O')$ は C^∞-diffeo

Ex 9.4

$$S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_k^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

各 $i = 1, \cdots, n+1$, $\varepsilon = \pm 1$ について

$$O_i^\varepsilon := \{ x \in S^n \mid \varepsilon x_i > 0 \} \subset S^n$$

$$U_i^\varepsilon := \{ u^{i,\varepsilon} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} (u_k^{i,\varepsilon})^2 < 1 \} \subset \mathbb{R}^n$$

$$u^{i,\varepsilon} : O_i^\varepsilon \to U_i^\varepsilon, \quad x \longmapsto (x_1, \cdots \overset{x_i}{\vee} \cdots x_{n+1})$$ とおくと

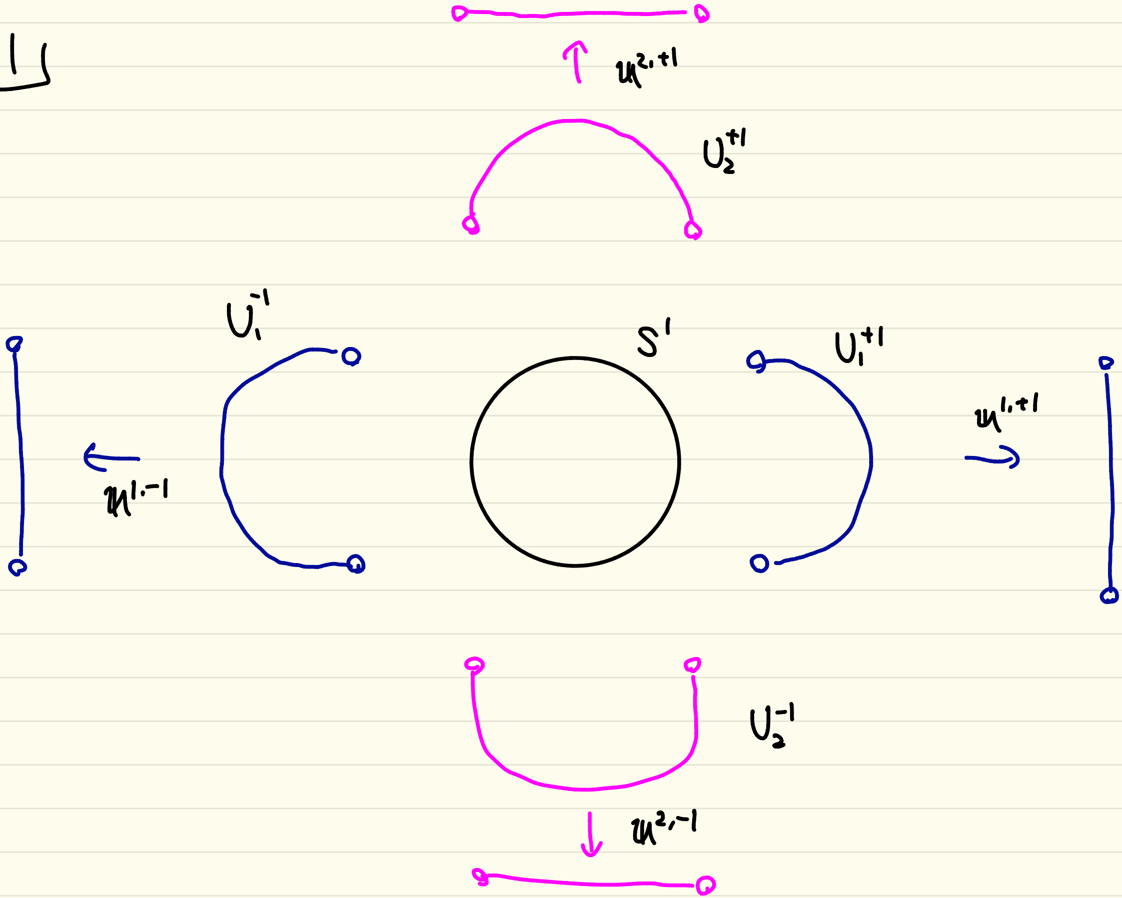
$$(O_i^\varepsilon, U_i^\varepsilon, u^{i,\varepsilon}) \in LC(S^n; \mathbb{R}^n)$$

故に $\mathcal{A}_0 := \{ (O_i^\varepsilon, U_i^\varepsilon, u^{i,\varepsilon}) \mid i = 1, \cdots, n+1, \ \varepsilon = \pm 1 \}$

$\subset LC(S^n; \mathbb{R}^n)$

は n 次元 C^∞-atlas on S^n.

$n = 1$


$\mathfrak{u}^{2,+1}$
U_2^{+1}
U_1^{-1}
S^1
U_1^{+1}
$\mathfrak{u}^{1,+1}$
$\mathfrak{u}^{1,-1}$
U_2^{-1}
$\mathfrak{u}^{2,-1}$

Ex 9.5

$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{k} : C^\infty\text{-級写像} \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \\ q \in \varphi(\mathbb{R}^{n+k}) \end{cases} \text{ を fix}$$

$S_q := \varphi^{-1}(q) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ が

(☆) $\forall p \in S_q,\ (d\varphi)_p : T_p\mathbb{R}^{n+k} \to T_q\mathbb{R}^{n}$ が全射

($\Leftrightarrow J\varphi_p$ のランクが k)

を満たすとする.

このとき

$$\mathcal{A}_0 := \{ (O, U, x) \in LC(S_q : \mathbb{R}^n) \mid (O, U, x) \text{ は } \mathbb{R}^{n+k} \text{ 内で正則} \}$$

は n次元 C^∞- atlas (by Prop 7.7 & Theorem 8.6)

Ex 9.6

$M = P(\mathbb{R}^{n+1})$ について

$\mathcal{A}_0 := \{ (O_i, U_i, x^i) \mid i = 1, \cdots, n+1 \} \subset \mathcal{LC}(P(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbb{R}^n)$

Ex 8.9 のもの

は n 次元 C^∞-atlas on $P(\mathbb{R}^{n+1})$

⑪ C^∞-級関数 on $(M, \mathcal{A}_0)$ の定義

$\mathcal{A}_0$: M 上の C^∞-atlas とする.

Def 9.7 : 連続関数 $f \in C^0(M)$ が $(M, \mathcal{A}_0)$ 上 C^∞-級

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall (O, U, \varphi) \in \mathcal{A}_0$, f は (O, U, φ) 上 C^∞-級

(i.e. $f \in C^\infty(M; (O, U, \varphi))$)

Def 9.8 $C^\infty(M; \mathcal{A}_0) := \{ f \in C^0(M) \mid f$ は $(M, \mathcal{A}_0)$ 上 C^∞-級 $\}$

$$\left(= \bigcap_{(O,U,\varphi) \in \mathcal{A}_0} C^\infty(M; (O, U, \varphi)) \right)$$

とおく.

Prop 9.9 $C^\infty(M; \mathcal{A}_0)$ は $C^0(M)$ の部分 $\mathbb{R}$-代数

(Hint : $C^\infty(M; (O, U, \varphi))$ は $C^0(M)$ の部分 $\mathbb{R}$-代数 (Prop 6.17)

部分 $\mathbb{R}$-代数たちの共通部分は部分 $\mathbb{R}$-代数 (一般論))

Rem: 以下も成り立つが この講義では使わない

Claim: $f : M \to \mathbb{R}$ (M上の関数) について

以下は同値

(i) $f \in C^0(M)$ かつ $f \in C^\infty(M; \mathcal{A}_0)$

非自明

(ii) $\forall (O, U, x) \in \mathcal{A}_0$, $f \circ x^{-1} : U \to \mathbb{R}$ が C^∞-級

Hint: "関数の連続性" に関する局所性を用いる.

◎ 極大 C^∞-atlas （よくばり地図セット）

Def 9.10：M 上の n 次元 C^∞-atlas $\mathcal{A}$ が極大

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$ となる n 次元 C^∞-atlas $\mathcal{B}$ on M は存在しない

Rem：$LC(M;\mathbb{R}^n)$ は一般に C^∞-atlas に
なるとは限らない（なる場合の方が珍しい）

Def 9.11 : 各 n 次元 C^∞-atlas $\mathcal{A}_0$ on M について

$$[\mathcal{A}_0] := \left\{ (O, U, x) \in LC(M; \mathbb{R}^n) \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^\forall (O', V, y) \in \mathcal{A}_0, \\ \underbrace{\tau_{xy}, \tau_{yx} \text{ はともに } C^\infty\text{-diffeo}} \end{array} \right\}$$

$\Updownarrow$

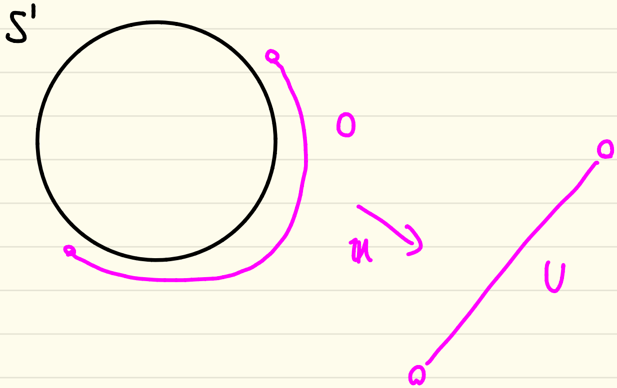
(τ_{xy}, τ_{yx} はともに C^∞ 級写像)

$\subset LC(M; \mathbb{R}^n)$

とおく

↑ ものすごくよくばった地図セット

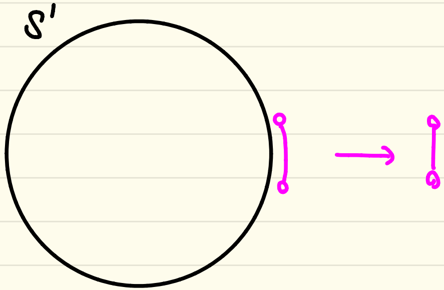
Ex 9.12: Ex 9.4 で $n=1$ のとき



は A_0 の元ではないが

$[A_0]$ の元ではある.

また



も同様

Prop 9.13 各 n 次元 C^∞-atlas $\mathcal{A}_0$ on M について

(1) $\mathcal{A}_0 \subset [\mathcal{A}_0]$

(2) $[\mathcal{A}_0]$ は 極大 C^∞-atlas on M

(3) $\mathcal{A}_0$ を含む 極大 C^∞-atlas on M は $[\mathcal{A}_0]$ のみ

(Hint : Prop 9.2 を使う)

Prop 9.14 : $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0$: n 次元 C^∞-atlas on M について 以下は同値

(i) $[\mathcal{A}_0] = [\mathcal{B}_0]$

(ii) ${}^\forall (O, U, \varphi) \in \mathcal{A}_0$, ${}^\forall (O', V, \psi) \in \mathcal{B}_0$ with $O \cap O' \neq \emptyset$,

$\tau_{\varphi\psi}$, $\tau_{\psi\varphi}$ はともに C^∞-diffeo.

Prop 9.15 : $n \geq 1$ とする.

$\mathcal{A}$: 極大 n 次元 C^∞-atlas on M とし,

$p \in M$
$r \in \mathbb{R}_{>0}$ を fix.

このとき $^\exists (O, U, \varphi) \in \mathcal{A}$ s.t.

$$\begin{cases} p \in O, \\ U = U_r(0) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 < r^2 \} \subset \mathbb{R}^n \\ \varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

7/19 に小テスト

Theorem 9.16 : $\mathcal{A}_0$: M 上の C^∞-atlas とする.

このとき $C^\infty(M; \mathcal{A}_0) = C^\infty(M; [\mathcal{A}_0])$

以下の Lemma を認める.

Lemma 9.17 : $(O, U, \varphi) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$ を fix.

(i) $\emptyset \neq O_0 \underset{\text{open}}{\subset} O$ について

$$C^\infty(M; (O, U, \varphi)) \subset C^\infty(M; (O_0, \varphi(O_0), \varphi|_{O_0}))$$

(ii) $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: O の open cover with $O_\lambda \neq \emptyset$ $(\forall \lambda \in \Lambda)$ について

$$C^\infty(M; (O, U, \varphi)) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^\infty(M; (O_\lambda, \varphi(O_\lambda), \varphi|_{O_\lambda}))$$

(Hint : Prop 9.1)

証明：“$\supset$” を示す．

$A_0 \subset [A_0]$ と $C^\infty(M;A_0)$, $C^\infty(M;[A_0])$ の定義より明らか．

“$\subset$” を示す．

示 $\forall f \in C^\infty(M;A_0)$, $f \in C^\infty(M;[A_0])$

$\forall f \in C^\infty(M;A_0)$ をとる．

示 $f \in C^\infty(M;[A_0])$ i.e. $\forall (O,U,\varphi) \in [A_0]$,

$f \in C^\infty(M;(O,U,\varphi))$

$\forall (O,U,\varphi) \in [A_0]$ をとる．

示 $f \in C^\infty(M;(O,U,\varphi))$

ここで $\{O'\}_{(O',V,\psi)\in\mathcal{A}_0}$ は M の open cover ($\because$ C^∞-atlas の定義)

であるから $\{O\cap O'\}_{(O',V,\psi)\in\mathcal{A}_0 \text{ with } O\cap O'\neq\emptyset}$ は O の open cover.

従って以下を示せば十分 ($\because$ Lemma 9.17 (ii))

示 $^\forall(O',V,\psi)\in\mathcal{A}_0$ with $O\cap O'\neq\emptyset$,

$$f\in C^\infty(M;(O\cap O',\varkappa(O\cap O'),\varkappa|_{O\cap O'}))$$

$^\forall(O',V,\psi)\in\mathcal{A}_0$ with $O\cap O'\neq\emptyset$ をとる.

示 $f\in C^\infty(M;(O\cap O',\varkappa(O\cap O'),\varkappa|_{O\cap O'}))$

いま $(O,U,\varkappa)\in[\mathcal{A}_0]$ かつ $(O',V,\psi)\in\mathcal{A}_0$ より

$\tau_{\varkappa\psi}$, $\tau_{\psi\varkappa}$ はともに C^∞-diffeo.

従って Prop 8.5 より 以下を示せば十分

示 $f \in C^\infty(M; (O\cap O', \psi(O\cap O'), \psi|_{O\cap O'}))$

いま $f \in C^\infty(M; A_0) \subset C^\infty(M; (O', V, \psi))$

$\subset C^\infty(M; (O\cap O', \psi(O\cap O'), \psi|_{O\cap O'}))$

($\because$ Lemma 9.19 (i))

よって $f \in C^\infty(M; (O\cap O', \psi(O\cap O'), \psi|_{O\cap O'}))$

$\blacksquare$

Cor. 9.18 $\mathcal{A}$: 極大 C^∞-atlas on M とする.

$f \in C^0(M)$ について 以下は同値

(i) $f \in C^\infty(M;\mathcal{A})$

$\Updownarrow$

(ii) ${}^\forall p \in M$, ${}^\exists (O, U, \varphi) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$

s.t. $f \circ \varphi^{-1} : U \to \mathbb{R}$: C^∞-級

(i.e. $f \in C^\infty(M;(O,U,\varphi))$)

◎ C^∞-級多様体 (C^∞-manifolds)

($\underset{\text{多くの場合}}{=}$ 可微分多様体, 滑らかな多様体)

(differentiable manifolds, smooth manifolds)

設定 : M : 位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix

Def 9.19 : $(M, \mathcal{A})$ が n 次元 C^∞-級多様体

期末試験

$\overset{\longleftrightarrow}{\text{def}}$

(i) $\mathcal{A}$ は 極大 n 次元 C^∞-atlas on M

(ii) M は ハウスドルフ空間 (C^∞-級関数の構成に必要)

(iii) M は 第二可算公理 を満たす

(i.e. 可算開基が存在する.) (積分論で使う)

Ex 9.20 : Ex 9.4 で $(S^n, [A_0])$ は n 次元 C^∞-級多様体

Ex 9.21 : Ex 9.5 で $(S_q, [A_0])$ は 〜

Ex 9.22 : Ex 9.6 で $(P(\mathbb{R}^{n+1}), [A_0])$ は 〜