2019 年前期 幾何学 A 演習 第 1 回 (6/12 配布)

キーワード: $\mathbb{R}^n$ の開集合上の C^∞-級関数

以下, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定しておく.

問 1. U を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合とする.

(1) U 上の C^1-級関数は U 上 C^0-級 (連続) であることを示せ (試験出さない).

(2) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. U 上の C^k-級関数は U 上 C^{k-1}-級でもあることを示せ (講義:Proposition 2.3).

問 2. α を実数とする.

(1) 正の実数 t について, 実数 t^α の定義を述べよ.

(2)
$$\phi_\alpha : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^\alpha$$
が $\mathbb{R}_{>0}$ 上 C^∞-級であることを示せ (講義:Proposition 2.6).

問 3. U を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合, V を $\mathbb{R}$ の空でない開集合とする. また $g : U \to \mathbb{R}$ を U 上の C^∞-級関数, $h : V \to \mathbb{R}$ を V 上の C^∞-級関数とし, $U \cap g^{-1}(V) (\subset U)$ は空でないとする.

(1) $U \cap g^{-1}(V)$ 上で $h \circ g$ の偏導関数を, g の偏導関数と h の導関数を用いて表せ (連鎖律).

(2)
$$f = h \circ g : U \cap g^{-1}(V) \to \mathbb{R}$$
は $U \cap g^{-1}(V)$ 上 C^∞-級であることを示せ (講義:Proposition 2.7).

問 4. 変数 t についての実多項式 $P(t)$ について,
$$f_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} P(\frac{1}{x})e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 \quad (x \leq 0) \end{cases}$$
とおく.

(1) 任意の多項式 $P(t)$ について, f_P が $\mathbb{R}$ 上連続であることを示せ.

(2) 任意の多項式 $P(t)$ について, f_P が $\mathbb{R}$ 上 C^∞-級であることを示せ (講義:Proposition 2.8 の一般化).

(3) 以下の関数が $x = 0$ においてテイラー展開不可能であることを示せ (試験出さない):
$$\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 \quad (x \leq 0) \end{cases}$$

問 5. (重要) U を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合とする.

(1) $\mathrm{Map}(U; \mathbb{R}) := \{f : U \to \mathbb{R}\}$ が "関数の和", "関数のスカラー倍" について実ベクトル空間となることを示せ (講義: Lemma 2.11).

(2) $C^\infty(U)$ が $\mathrm{Map}(U; \mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示せ (講義:Proposition 2.10).

(3) 各 $i = 1, \ldots, n$ について
$$\frac{\partial}{\partial x_i} : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
が well-defined であること, また線形写像となることを示せ (講義:Proposition 2.12).

(4) ベクトル空間 $\mathrm{Map}(U; \mathbb{R})$ は "関数の積" について $\mathbb{R}$-代数となることを示せ. また $C^\infty(U)$ は $\mathrm{Map}(U; \mathbb{R})$ の部分 $\mathbb{R}$-代数となることを示せ (講義:Proposition 2.15).

Hint: $f_1, f_2 \in C^\infty(U)$ について, $f_1 \cdot f_2 \in C^\infty(U)$ となることを示せばよい.