2019 年前期 幾何学 A 演習 第 11 回 (7/24 配布)

キーワード: 多様体の間の C^∞-級写像

問 45. (重要) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1,\ x_3 > 0\} \subset \mathbb{R}^3$ とする．M_1 上の 2 次元局所座標系 $(O, U, \boldsymbol{u})$ を以下で定める:

- $O = M_1$, $U = \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} : O \to U,\ x \mapsto (x_1, x_2)$.

このとき $\mathcal{A}_0 := \{(O, U, \boldsymbol{u})\}$ は M_1 上の 2 次元 C^∞-atlas となり, $\mathcal{A}_1 := [\mathcal{A}_0]$ は M_1 上の極大 2 次元 C^∞-atlas となる．この意味で, $M_1 = (M_1, \mathcal{A}_1)$ を 2 次元 C^∞-級多様体とみなす．また

$$M_2 = S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

とし, 講義 Example 9.20 の意味で 2 次元 C^∞-級多様体とみなす.

$$\varphi : M_1 \to M_2,\ x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

が C^∞-級写像であることを示せ (Hint: Theorem 11.4 を用いる).

問 46. 以下 $M_1 = (M_1, \mathcal{A}_1)$, $M_2 = (M_2, \mathcal{A}_2)$ をそれぞれ n_1 次元, n_2 次元 C^∞-級多様体とする．$\varphi : M_1 \to M_2$ を C^∞-diffeo とする.

(1)

$$\varphi^* : C^\infty(M_2) \to C^\infty(M_1),\ f \mapsto f \circ \varphi$$

が $\mathbb{R}$-代数同型であることを示せ．ただし $\mathbb{R}$-代数の間の写像が $\mathbb{R}$-代数同型であるとは, 全単射であって, 自分自身も逆写像もそれぞれ $\mathbb{R}$-代数準同型であることとする (これは 「$\mathbb{R}$-代数準同型であって全単射」という条件と同値であるが, ここではそれを用いなくてもよい).

(2) $k = 1, 2$ について,

$$\mathrm{id}_{M_k} : M_k \to M_k$$

を恒等写像とする．このとき id_{M_k} が C^∞-級写像であることを示せ．また各 $p \in M_k$ について, id_{M_k} の p における微分

$$(d(\mathrm{id}_{M_k}))_p : T_pM_k \to T_pM_k$$

も恒等写像であることを示せ.

(3) 各 $p \in M_1$ について,

$$(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$$

は線型同型であることを示せ (講義 Theorem 11.12). (Hint: Theorem 11.11 を用いる.)

裏へつづく

問 47. (ユークリッド空間の開集合は多様体) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定し, U を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合とする. U 上の局所座標系 (U, U, id_U) (講義 Example 6.6) を考え, $\mathcal{A}_0 = \{(U, U, \mathrm{id}_U)\}$ とおく. このとき $\mathcal{A}_0$ は U 上の C^∞-atlas であり, $U = (U, [\mathcal{A}_0])$ は n 次元 C^∞-級多様体となる.

- 関数 $f : U \to \mathbb{R}$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ:
  条件 (i): f が講義 Definition 2.4 の意味で U 上 C^∞-級である.
  条件 (ii): $f \in C^\infty(U; [\mathcal{A}_0])$.
  (Hint: 講義 Theorem 9.16 を用いる)
- O を U の空でない開集合とし, V を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合とする. また $\boldsymbol{u} : O \to V$ を C^∞-diffeo とする (ユークリッド空間の間の開集合間の写像の意味で). このとき $(O, V, \boldsymbol{v}) \in [\mathcal{A}_0]$ となることを示せ.

問 48. (開部分多様体) $M = (M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞-級多様体とする. また W を M の空でない開集合とする.

(1) $(O, U, \boldsymbol{x})$ を M 上の n 次元局所座標系であって, $W \cap O \neq \emptyset$ となるものとする. このとき

$$(W \cap O, \boldsymbol{x}(W \cap O), \boldsymbol{x}|_{W \cap O})$$

が W 上の n 次元局所座標系であることを示せ.

(2) このとき,

$$\mathcal{A}_W = \{(W \cap O, \boldsymbol{x}(W \cap O), \boldsymbol{x}|_{W \cap O}) \mid (O, U, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{A} \text{ かつ } W \cap O \neq \emptyset\}$$

とすると, $\mathcal{A}_W$ は W 上の極大 n 次元 C^∞-atlas となることを示せ. これにより $W = (W, \mathcal{A}_W)$ を n 次元 C^∞-級多様体とみなすことができる.

問 49. S^1 を講義 Example 9.20 の意味で 1 次元 C^∞-級多様体とみなす. また, S^1 の開集合 $M_1 = S^1 \setminus \{(0, 1)\}$ を上記問 48 の意味で 1 次元 C^∞-級多様体とみなす. さらに $M_2 = \mathbb{R}$ とし, 上記問 47 の意味で 1 次元 C^∞-級多様体とみなす. ここで写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ を

$$\varphi : M_1 \to M_2,\ x \mapsto \frac{x_1}{1 - x_2}$$

とする. このとき φ が C^∞-diffeo であることを示せ (逆写像 φ^{-1} を構成し, φ, φ^{-1} がともに C^∞-級写像であることを示す).