2019 年前期 幾何学 A 演習 第 12 回 (7/26 配布)

キーワード: ユークリッド空間の正則部分多様体

**問 50.** $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定する. $S$ を $\mathbb{R}^{n+k}$ の部分集合であって, 以下の条件を満たすものとする:

条件 (R): 各 $p \in S$ について, $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{LC}(S; \mathbb{R}^n)$ であって, $p \in O$ かつ $\mathbb{R}^{n+k}$ 内で正則となるものが存在する.

(1) このとき

$$\mathcal{A}_S^{\mathbb{R}^{n+k}} := \{(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{LC}(S; \mathbb{R}^n) \mid (O, U, \boldsymbol{u}) \text{ は } \mathbb{R}^{n+k} \text{ 内で正則 }\}$$

とおく. $\mathcal{A}_S^{\mathbb{R}^{n+k}}$ が $S$ 上の $n$ 次元 $C^\infty$-atlas であることを示せ (講義: Proposition 12.6). (Hint: Theorem 8.6 を用いる).

(2) 講義 Example 9.20 の $S^n = (S^n, [\mathcal{A}_0])$ について考える. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ が条件 (R) を満たすことを示し,

$$[\mathcal{A}_0] = [\mathcal{A}_{S^n}^{\mathbb{R}^{n+1}}]$$

となることを示せ (Hint: $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_{S^n}^{\mathbb{R}^{n+1}}$ を示して, Proposition 9.13 を用いる).

**問 51.** (重要) $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1\}$ を $\mathbb{R}^3$ の正則部分多様体とみなす. また $p = (p_1, p_2, p_3) \in S^3$ を固定し, $T_pS^2$ を $T_p\mathbb{R}^3$ の線型部分空間とみなす (Fact 12.10).

(1)

$$c_\alpha : \mathbb{R} \to S^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & \\ \sin t & \cos t & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},$$

$$c_\beta : \mathbb{R} \to S^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & & -\sin t \\ & 1 & \\ \sin t & & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},$$

$$c_\gamma : \mathbb{R} \to S^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos t & -\sin t \\ & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

とおく. このとき $c_\alpha$, $c_\beta$, $c_\gamma$ はそれぞれ $S^2$ 内の $C^\infty$-級曲線であることを示せ (まず well-defined であることを示す. その後, Fact 12.9 を用いて $C^\infty$-級であることを示す). また $t = 0$ における速度ベクトル $\dot{c}_\alpha(0), \dot{c}_\beta(0), \dot{c}_\gamma(0) \in T_pS^2 \subset T_p\mathbb{R}^3$ をそれぞれ求めよ (Hint: Fact 5.19 を用いる).

(2) このとき

$$T_pS^2 = \left\{ \sum_{i=1}^3 a_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \mid \sum_{i=1}^3 a_i p_i = 0 \right\} \subset T_p\mathbb{R}^3$$

となることを示せ.

(3)

$$\varphi; S^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (x_1, x_2)$$

が $C^\infty$-級写像であることを示せ (Hint:Fact 12.9 を用いる). また $(d\varphi)_p : T_pS^2 \to T_\varphi(p)\mathbb{R}^3$ の階数を求めよ (Hint: $p_3 = 0$ の場合と $p_3 \neq 0$ の場合に分けて考えよ).