2019 年前期 幾何学 A 演習 第 2 回 (6/14 配布)

キーワード: 方向微分の関数論的特徴付け

以下, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定し, $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合 U も固定しておく.

問 6. $p \in U$ とする.

(1) 各 $v \in \mathbb{R}^n$ について,

$$v_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R},\ f \mapsto v_p(f) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p+hv) - f(p)}{h}$$

は線型写像であることを示せ (講義: Proposition 3.3). ただし well-defined 性 (極限の収束性:講義の Proposition 3.2) は認めてよいこととする.

(2) 各 $v \in \mathbb{R}^n$ について, 線型写像 $v_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ が p $(\in U)$ においてライプニッツ則を満たすことを示せ: すなわち, 任意の $f, g \in C^\infty(U)$ について,

$$v_p(f \cdot g) = v_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v_p(g)$$

となることを示せ (講義: Proposition 3.4).

問 7. $p \in U$ とする.

$$\mathrm{Hom}(C^\infty(U), \mathbb{R}) := \{\eta : C^\infty(U) \to \mathbb{R} \mid \eta \text{ は線型写像 }\}$$

とおき, さらに

$$T_p(U) := \{\eta \in \mathrm{Hom}(C^\infty(U), \mathbb{R}) \mid \eta \text{ は } p\ (\in U) \text{ においてライプニッツ則を満たす }\}$$

とおく.

(1) $T_p(U)$ は $\mathrm{Hom}(C^\infty(U), \mathbb{R})$ の部分ベクトル空間となることを示せ (講義: Proposition 3.8). ただし $\mathrm{Hom}(C^\infty(U), \mathbb{R})$ が汎関数の和とスカラー倍についてベクトル空間になることは用いてよい (講義: Lemma 3.9).

(2)

$$\Phi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_p(U),\ v \mapsto v_p$$

が線型写像となることを示せ (講義: Proposition 3.10). ただし講義の Proposition 3.2 を用いてよいこととする.