2019 年前期 幾何学 A 演習 第 3 回 (6/19 配布)

キーワード: ユークリッド空間の開集合上のベクトル場

以下, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定し, $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合 U も固定しておく.

問 8. 演習問題 問 5 (4) で定めた $\mathbb{R}$-代数 $\mathrm{Map}(U;\mathbb{R})$ は結合的かつ可換であるである, すなわち以下を満たすことを示せ:

結合性: 任意の $f, g, h \in \mathrm{Map}(U;\mathbb{R})$ について, $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$.

可換性: 任意の $f, g \in \mathrm{Map}(U;\mathbb{R})$ について, $f \cdot g = g \cdot f$.

これより特に部分 $\mathbb{R}$-代数 $C^\infty(U)$ も結合的かつ可換である (講義: Proposition 2.15 の補足).

問 9.

$$\mathrm{End}(C^\infty(U)) := \{\nu : C^\infty(U) \to C^\infty(U) \mid \nu \text{ は線型 }\}$$

とおく. また,

$$\mathfrak{X}^\infty(U) := \{X \in \mathrm{End}(C^\infty(U)) \mid X \text{ は } U \text{ 上のベクトル場 }\}$$

とおく.

(1) $\mathrm{End}(C^\infty(U))$ にベクトル空間の構造を定義せよ.

(2) $\mathfrak{X}^\infty(U)$ が $\mathrm{End}(C^\infty(U))$ の線型部分空間であることを示せ (講義: Proposition 4.3).

(3) $\mathrm{End}(C^\infty(U))$ は写像の合成により $\mathbb{R}$-代数となることを示せ (この $\mathbb{R}$-代数は結合的であるが可換とは限らない).

(4) $n \geq 1$ とする. このとき $\mathfrak{X}^\infty(U)$ は写像の合成で<u>閉じない</u>ことを示せ.

問 10. 各 $h \in C^\infty(U)$ について,

$$L_h : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto h \cdot f$$

とおく.

(1) 任意の $h \in C^\infty(U)$ について, $L_h \in \mathrm{End}(C^\infty(U))$, つまり L_h は線型であることを示せ (Hint: 講義: Proposition 2.15 を用いてよい).

(2) 写像

$$L : C^\infty(U) \to \mathrm{End}(C^\infty(U)),\ h \mapsto L_h$$

は線型写像であることを示せ. また, $\mathbb{R}$-代数準同型 (線型写像で二項演算を保つ) であることも示せ.

問 11. 各 $h \in C^\infty(U)$, $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ について, ベクトル場 $hX \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ を

$$hX : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto h \cdot (Xf)$$

と定める (第 3 回小テスト: 講義 Proposition 4.5).

(1) 写像

$$C^\infty(U) \times \mathfrak{X}^\infty(U) \to \mathfrak{X}^\infty(U),\ (h, X) \to hX$$

は双線型であることを示せ.

(2) $h_1, h_2 \in C^\infty(U)$, $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ とする. このとき $(h_1 \cdot h_2)X = h_1(h_2X)$ であることを示せ.

裏につづく

問 12. (重要) $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$, $p \in U$ について,

$$X_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R},\ f \mapsto (Xf)(p)$$

とおく.

(1) 任意の $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$, $p \in U$ について, $X_p \in T_p(U)$ となることを示せ (講義:Proposition 4.12).

(2) $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ (講義:Proposition 4.13):
条件 (i) $X = Y$.
条件 (ii) $X_p = Y_p$ for any $p \in U$.

(3) $n = 2$, $U = \mathbb{R}^2$ とする. $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場

$$X = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

を表す図を描け (Hint: 各点 $p \in \mathbb{R}^2$ について X_p がどうなるか計算せよ).

問 13. 各 $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ について,

$$[X, Y] = XY - YX : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto X(Yf) - Y(Xf)$$

と定める.

(1) 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ について, $[X, Y] \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ となることを示せ (一般に $XY, YX \in \mathrm{End}(C^\infty(U))$ はベクトル場になるとは限らないことに注意せよ (演習問題 問 9 (4) を見よ)).

(2) $\mathfrak{X}^\infty(U)$ は上記の bracket 積 $[\cdot, \cdot]$ により $\mathbb{R}$-代数となることを示せ. また $n \geq 1$ のとき, bracket 積 $[\cdot, \cdot]$ は結合的でも可換でもないことを示せ (講義: Proposition 4.16).

(3) $h_i, g_j \in C^\infty(U)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ とし, U 上のベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ を

$$X = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i},\ Y = \sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

として定める. このとき

$$[X, Y] = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \left(h_l \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_l} - g_l \cdot \frac{\partial h_k}{\partial x_l} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

となることを示せ (講義: Example 4.15). ただし, 任意の $i, j = 1, \ldots, n$, $f \in C^\infty(U)$ について,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}$$

となるという事実 (解析の講義で扱われた) は用いてよい.