2019 年前期 幾何学 A 演習 第 4 回 (6/21 配布)

キーワード: C^∞-級写像と全微分

以下, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定し, 各 $i = 1, 2$ について, $\mathbb{R}^{n_i}$ の空でない開集合 U_i を固定しておく.

問 14. (重要) 写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ を固定する. このとき,

$$\varphi^* : \mathrm{Map}(U_2; \mathbb{R}) \to \mathrm{Map}(U_1; \mathbb{R}),\ f \mapsto (f \circ \varphi)$$

が $\mathbb{R}$-代数準同型であることを示せ (講義: Proposition 5.2).

問 15. 写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ について考える.

$$\varphi : U_1 \to U_2,\ x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n_2}(x))$$

と書くことにする. ここで $\varphi_1, \dots, \varphi_{n_2}$ は U_1 上の関数とみなす.

(1) $\varphi_1, \dots, \varphi_{n_2}$ が U_1 上 C^∞-級であるとする. また $f : U_2 \to \mathbb{R}$ を U_2 上の C^∞-級関数とする. このとき, 合成関数 $f \circ \varphi : U_1 \to \mathbb{R}$ の偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(f \circ \varphi), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n_1}}(f \circ \varphi) : U_1 \to \mathbb{R}$$

をそれぞれ, f の導関数, $\varphi_1, \dots, \varphi_{n_2}$ の偏導関数などを用いて表せ (連鎖律). また合成関数 $f \circ \varphi : U_1 \to \mathbb{R}$ が U_1 上 C^∞-級であることを示せ.

(2) 写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i): $\varphi : U_1 \to U_2$ は講義 Definition 5.3 の意味で C^∞-級写像.

条件 (ii): $\varphi_1, \dots, \varphi_{n_2} : U_1 \to \mathbb{R}$ がすべて U_1 上の C^∞-級関数.

(Hint: 各 $i = 1, \dots, n_2$ について, $\xi_i : U_2 \to \mathbb{R},\ y \mapsto y_i$ とおくと, $\varphi_i = \xi_i \circ \varphi$).

問 16. (重要) $\varphi : U_1 \to U_2$ を講義 Definition 5.3 の意味で C^∞-級写像であるとする. また $p \in U_1$ とする. ここで各 $\eta \in T_p(U_1)$ について,

$$(d\varphi)_p(\eta) : C^\infty(U_2) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \eta(\varphi^*(f))$$

と定める.

(1) 任意の $\eta \in T_p(U_1)$ について, $(d\varphi)_p(\eta) \in T_{\varphi(p)}(U_2)$ となることを示せ.

(2) 写像

$$(d\varphi)_p : T_p(U_1) \to T_{\varphi(p)}(U_2),\ \eta \mapsto (d\varphi)_p(\eta)$$

は線型写像であることを示せ.