2019 年前期 幾何学 A 演習 第 5 回 (6/28 配布)

キーワード: C^∞-級写像と全微分

問 16. (a,b) を開区間とする $(-\infty \le a < b \le \infty)$. $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ を固定し, U を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合とする. 各 C^∞-級曲線 $c\colon (a,b) \to U$ (C^∞-級写像のこと) と, 各 $t_0 \in (a,b)$ について

$$\dot{c}(t_0)\colon C^\infty(U) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \lim_{h\to 0} \frac{(f\circ c)(t_0+h) - (f\circ c)(t_0)}{h} = (f\circ c)'(t_0)$$

とおく (これを時刻 t_0 における曲線 c の速度ベクトルという).

(1) $c\colon (a,b) \to U$ を C^∞-級曲線とする. 各 $t_0 \in (a,b)$ について,

$$\dot{c}(t_0) = (dc)_{t_0}\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_{t_0}\right) \in T_{c(t_0)}(U)$$

となることを示せ. ただし,

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{t_0} : C^\infty((a,b)) \to \mathbb{R},\ g \mapsto \lim_{h\to 0} \frac{g(t_0+h) - g(t_0)}{h} = g'(t_0)$$

とおいた.

(2) $c\colon (a,b) \to U$ を C^∞-級曲線とする.

$$c\colon (a,b) \to U,\ t \mapsto (c_1(t), \ldots, c_n(t))$$

と書いて, $c_1, \ldots, c_n$ を $C^\infty((a,b))$ の元とみなす. このとき, 各 $t_0 \in (a,b)$ について

$$\dot{c}(t_0) = \Phi_{c(t_0),U}\Big(\sum_{i=1}^n c_i'(t_0)e_i\Big)$$

となることを示せ. ただし $e_1, \ldots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底, $c_i'(t_0)$ は関数 c_i の t_0 における微分係数 $(i = 1, \ldots, n)$ とする. また, 各 $v \in \mathbb{R}^n$ について, $\Phi_{c(t_0),U}(v)$ は $c(t_0)$ における v-方向微分を表すこととする.

(3) $U \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合であると仮定する. $p \in U$ とする. このとき, 任意の $\eta \in T_p(U)$ について,

$$c(0) = p \text{ かつ } \dot{c}(0) = \eta$$

となるような C^∞-級曲線 $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ (ただし $\varepsilon > 0$) が存在することを示せ.

問 17. 以下, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ を固定し, 各 $i = 1, 2$ について, $\mathbb{R}^{n_i}$ の空でない開集合 U_i を固定しておく. また, (a,b) を開区間とし $(-\infty \le a < b \le \infty)$, $c\colon (a,b) \to U$ を C^∞-級曲線とする. $t_0 \in (a,b)$ を固定し, $p := c(t_0)$ とおく. このとき

$$(d\varphi)_p(\dot{c}(t_0)) = (\dot{\overline{\varphi \circ c}})(t_0)$$

となることを示せ.

$\boxed{\text{裏につづく}}$

問 18. $n_1 = n_2 = 2$, $U_1 = U_2 = \mathbb{R}^2$ とする．$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を C^∞-級写像であって，$\varphi(0,0) = (1,1)$ となるものとする．また

- $c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t, 2t^2)$,
- $c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t^3, t)$,

とおく．

(1) φ の $(0,0)$ におけるヤコビ行列が

$$(J\varphi)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

であるとする．このとき，$\mathbb{R}^2$ 内の曲線 $\varphi \circ c_1$, $\varphi \circ c_2$ の時刻 0 における速度ベクトルをそれぞれ求めよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 $\varphi \circ c_1$, $\varphi \circ c_2$ がそれぞれ

- $\varphi \circ c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t+1, 1)$,
- $\varphi \circ c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t^3+1, 1)$,

となるとする．このとき φ の $(0,0)$ におけるヤコビ行列を求めよ．また

$$(d\varphi)_{(0,0)} : T_{(0,0)}\mathbb{R}^2 \to T_{(1,1)}\mathbb{R}^2$$

の階数を求めよ．