2019 年前期 幾何学 A 演習 第 6 回, 第 7 回 (7/3 配布)

キーワード: 局所座標系, 正則な局所座標系, 陰関数定理

**問 19.** $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定する. $U_1$, $U_2$ をそれぞれ $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$ の空でない開集合とする. $\varphi : U_1 \to U_2$ が講義: Definition 5.3 の意味で $C^\infty$-級写像であるとき, $\varphi : U_1 \to U_2$ は連続であることを示せ (講義: Proposition 5.4 を用いてよい).

**問 20.** $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定する. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線型写像とする. このとき $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は講義: Definition 5.3 の意味で $C^\infty$-級写像であることを示せ (講義: Proposition 5.4 を用いてよい).

**問 21.** $X$, $Y$ を位相空間とし, $A \subset X$, $B \subset Y$ を固定する. 連続写像 $f : X \to Y$ が $f(A) \subset B$ となるとき, $f$ は $A$ から $B$ の写像としても連続であることを示せ (講義: Proposition 6.4 (i)). $A$ や $B$ にどのような位相を入れて考えているのかについても説明せよ.

**問 22.** $M$ を位相空間とする.

(1)
$$C^0(M) := \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続 }\}$$
とおく. このとき $C^0(M)$ は $\mathrm{Map}(M;\mathbb{R})$ の部分 $\mathbb{R}$-代数である (i.e. 線型部分空間であり, 二項演算で閉じる) ことを示せ (講義: Proposition 6.13).

(2) $(O, U, \boldsymbol{x})$ を $M$ 上の $n$ 次元局所座標系とする.
$$C^\infty(M; (O, U, \boldsymbol{x})) := \{f \in C^0(M) \mid f \text{ は } (O, U, \boldsymbol{x}) \text{ 上 } C^\infty\text{-級 }\}$$
とおく (講義: Definition 6.17 をみよ). このとき $C^\infty(M; (O, U, \boldsymbol{x}))$ は $C^0(M)$ の部分 $\mathbb{R}$-代数であることを示せ (講義: Proposition 6.18).

**問 23.** 講義: Example 6.7 であたえた $S^n$ の局所座標系 $(O, U, \boldsymbol{u})$ は講義: Definition 7.1 の意味で正則であることを示せ (講義: Example 7.2).

**問 24.** $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $S \subset \mathbb{R}^{n+k}$ $(S \neq \emptyset)$ を固定する. また $(O, U, \boldsymbol{u})$ を $S$ 上の正則な $n$ 次元局所座標系とする. さらに, $D$ を $\mathbb{R}^{n+k}$ の開集合であって, $S \subset D$ となるものとし, $f : D \to \mathbb{R}$ を $D$ 上の $C^\infty$-級関数とする. このとき
$$f|_S \in C^\infty(S; (U, O, \boldsymbol{u}))$$
となることを示せ (講義: Proposition 7.3).

**問 25.** 講義: Example 6.7 であたえた $S^n$ の局所座標系 $(O, U, \boldsymbol{u})$ について考える. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $n$ 変数多項式関数としたとき,
$$f|_{S^n} \in C^\infty(S^n; (U, O, \boldsymbol{u}))$$
となることを示せ (問 22,23 の結果を用いてよい).

裏につづく

**問 26.** $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定する．$C^\infty$-級写像 $\varphi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$, $q \in \varphi(\mathbb{R}^{n+k})$ を固定し，

$$S_q := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \mid \varphi(x) = q\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$$

とおく．$p \in S_q$ であって，

$$(d\varphi)_p : T_p\mathbb{R}^{n+k} \to T_q\mathbb{R}^k$$

が全射 ( $\iff$ ヤコビ行列 $(J\varphi)_p$ が階数 $k$ (cf. 講義第 4 回, 第 5 回参照)) であるようなものを考える．このとき, 講義: Theorem 7.5 を用いて, $S_q$ 上で $p$ のまわりの正則な $n$ 次元局所座標系が存在することを示せ (講義: Proposition 7.7).

**問 27.** $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ とおく．

(1) $S$ の絵を描け．

(2) $p = (1, 0) \in S$ とおく．このとき, $S$ 上の $p$ のまわりの正則な 1 次元局所座標系が存在することを示せ (講義: Proposition 7.7 を用いてよい).

**問 28.** $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\} \subset \mathbb{R}^3$ とおく．

(1) $S$ の絵を描け．

(2) $p = (0, 0, 1) \in S$ とおく．このとき, $S$ 上の $p$ のまわりの正則な 2 次元局所座標系が存在することを示せ (講義: Proposition 7.7 を用いてよい).