2019 年前期 幾何学 A 演習 第 8 回 (7/12 配布)

キーワード: 座標変換, 射影空間

問 29. (重要) 座標変換を説明する絵を描け.

問 30. (重要) $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1\}$ とし, 以下のように S^2 上の 2 次元局所座標系 $(O, U, \boldsymbol{u})$, $(O', V, \boldsymbol{v})$ を定める.

- $O := \{x \in S^2 \mid x_3 > 0\} \subset S^2$,
- $U := \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^2 u_i^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$,
- $\boldsymbol{u} : O \to U,\ x \mapsto (x_1, x_2)$,

および

- $O' := \{x \in S^2 \mid x_2 > 0\} \subset S^2$,
- $V := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^2 v_i^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$,
- $\boldsymbol{v} : O' \to V,\ x \mapsto (x_1, x_3)$.

(1) 座標変換 $\tau_{\boldsymbol{uv}}$, $\tau_{\boldsymbol{vu}}$ を書き下せ (定義域, 値域も求めよ). また $\tau_{\boldsymbol{uv}}$, $\tau_{\boldsymbol{vu}}$ は共に C^∞-級であることを確認せよ.

(2) $f : S^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto x_1 + x_2 + x_3$ とする. このとき関数 $f \circ \boldsymbol{u}^{-1}$ と $f \circ \boldsymbol{v}^{-1}$ を書き下せ (定義域も求めよ). また f は局所座標系 $(O, U, \boldsymbol{u})$, $(O', V, \boldsymbol{v})$ のどちらの上でも C^∞-級であることを示せ.

問 31. $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定し, $\mathbb{R}^{n+k}$ の部分集合 S を考える. $(O, U, \boldsymbol{u})$, $(O', V, \boldsymbol{v})$ を S 上の n 次元局所座標系であって, 共に $\mathbb{R}^{n+k}$ 内で正則で, $O \cap O' \neq \emptyset$ を満たすものとする. このとき座標変換

$$\tau_{\boldsymbol{uv}} :\ \boldsymbol{u}(O \cap O') \to \boldsymbol{v}(O \cap O'),$$
$$\tau_{\boldsymbol{vu}} :\ \boldsymbol{v}(O \cap O') \to \boldsymbol{u}(O \cap O'),$$

は共に C^∞-diffeo であることを示せ (講義: Theorem 8.6).

問 32. X, Y を位相空間とする. また X 上の同値関係 $\sim$ を固定する. X の $\sim$ による商空間を $X/\sim$ と書き, 商写像を

$$\pi : X \to X/\sim,\ x \mapsto [x]$$

と書くことにする.

(1) 写像 $\tilde{f} : X \to Y$ を考える. $\tilde{f} = f \circ \pi$ となるような写像 $f : X/\sim \to Y$ が存在するための $\tilde{f}$ についての必要十分条件を述べよ.

(2) 写像 $\tilde{f} : X \to Y$ と 写像 $f : X/\sim \to Y$ が $\tilde{f} = f \circ \pi$ を満たすとする. また $\tilde{f}$ が連続であるとする. このとき f も連続であることを示せ.

(3) (試験出さない) 同値関係 $\sim$ を $X \times X$ の部分集合とみなしたものを $R_\sim$ と書くことにする (二項関係の定義に戻った). このとき $R_\sim$ についての以下の二条件は同値であることを示せ:

条件 (i)　商空間 $X/\sim$ はハウスドルフ空間である.

条件 (ii)　$R_\sim$ は直積空間 $X \times X$ の閉集合.

裏に続く

問 33. 以下, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定し, $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ とおく. X 上の同値関係 $\sim$ を以下で定める:

$$x \sim y \text{ in } X \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} {}^{\exists}\lambda \in \mathbb{R}^{\times} \text{ such that } y = \lambda x.$$

この同値関係による X の商空間を $P(\mathbb{R}^{n+1})$ と書く.

(1) 上記 $\sim$ が $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の同値関係を定めていることを確認せよ.

(2) 商写像

$$\pi : X \to P(\mathbb{R}^{n+1}),\ x \mapsto [x]$$

が開写像であることを示せ.

(3) (試験出さない) $P(\mathbb{R}^{n+1})$ が連結コンパクト空間であることを示せ (Hint: 連結コンパクト空間である n 次元球面 S^n から $P(\mathbb{R}^{n+1})$ への全射連続写像を構成せよ).

(4) (試験出さない) $P(\mathbb{R}^{n+1})$ がハウスドルフ空間であることを示せ (Hint: 上記の商空間の問題の結果を用いよ).

問 34. $i = 1, \ldots, n+1$ とする. $(O_i, U_i, \boldsymbol{u}^i)$ を以下のように定める:

- $O_i := \{[x] \in P(\mathbb{R}^{n+1}) \mid x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, x_i \neq 0\} \subset P(\mathbb{R}^{n+1})$,
- $U_i := \mathbb{R}^n$,
- $\boldsymbol{u}^i : O_i \to U_i,\ [x] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})$.

$(O_i, U_i, \boldsymbol{u}^i)$ が $P(\mathbb{R}^{n+1})$ 上の n 次元局所座標系であることを示したい.

(1) O_i が $P(\mathbb{R}^{n+1})$ の開集合であることを示せ.

(2) 上記 $\boldsymbol{u}^i$ が写像として well-defined であることを示せ.

(3) $\boldsymbol{u}^i : O_i \to U_i$ の逆写像を構成せよ.

(4) $\boldsymbol{u}^i : O_i \to U_i$ が同相写像であることを示せ (Hint: 上記の商空間の問題の結果を用いよ).

問 35. (重要) $\bigcup_{i=1}^{n+1} O_i = P(\mathbb{R}^{n+1})$, すなわち $\{O_i\}_{i=1,\ldots,n+1}$ が $P(\mathbb{R}^{n+1})$ の開被覆であることを示せ.

問 36. (重要) $1 \leq i < j \leq n+1$ とする. $P(\mathbb{R}^{n+1})$ 上の n 次元局所座標系 $(O_i, U_i, \boldsymbol{u}^i)$ から $(O_j, U_j, \boldsymbol{u}^j)$ への座標変換を τ_{ij} と書くことにする. $\tau_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ および $\tau_{ji} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を書き下し, C^{∞}-級写像であることを示せ.