2019 年前期 幾何学 A 演習 第 9 回, 第 10 回 (7/19 配布)

キーワード: C^∞-atlas, C^∞-級多様体, 多様体上の接空間, 多様体上のベクトル場

問 37. U_1, U_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$ の空でない開集合とする ($n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). また $\{U_{1,\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ を U_1 の開被覆であって, $U_{1,\lambda} \neq \emptyset$ (for any $\lambda \in \Lambda$) となるものとする. このとき, 写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ (講義: Proposition 9.2):

条件 (i): $\varphi : U_1 \to U_2$ は C^∞-級写像.

条件 (ii): 任意の $\lambda \in \Lambda$ について, 制限写像 $\varphi|_{U_{1,\lambda}} : U_{1,\lambda} \to U_2$ は C^∞-級写像.

問 38. (重要) $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ ($\subset \mathbb{R}^2$) とする. S^1 上の局所座標系 $(O_i^\pm, U_i^\pm, \boldsymbol{u}^{i,\pm})$ ($i = 1, 2$) を以下のように定める:

- $O_1^\pm = \{x \in S^1 \mid \pm x_1 > 0\} \subset S^1$, $U_1^\pm = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$,
  $\boldsymbol{u}^{1,\pm} : O_1 \to U_1,\ x \mapsto x_2$,
- $O_2^\pm = \{x \in S^1 \mid \pm x_2 > 0\} \subset S^1$, $U_2^\pm = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$,
  $\boldsymbol{u}^{2,\pm} : O_1 \to U_1,\ x \mapsto x_1$.

以下, $(O_i^\pm, U_i^\pm, \boldsymbol{u}^{i,\pm})$ ($i = 1, 2$) がそれぞれ S^1 の 1 次元局所座標系であることは認めてよいこととする. ここで $\mathcal{A}_0 = \{(O_i^+, U_i^+, \boldsymbol{u}^{i,+}),\ (O_i^-, U_i^-, \boldsymbol{u}^{i,-}) \mid i = 1, 2\}$ (4 枚の局所座標系の集合) とおく.

(1) 定義に従って $\mathcal{A}_0$ が S^1 上の 1 次元 C^∞-atlas であることを示したい. 何を示せばよいか述べよ.

(2) $O_1^+ \cup O_1^- \cup O_2^+ \cup O_2^- = S^1$ を示せ.

(3) $(O_1^+, U_1^+, \boldsymbol{u}^{1,+})$ から $(O_2^-, U_2^-, \boldsymbol{u}^{2,-})$ への座標変換を $\tau_{(1,+),(2,-)}$ とおく. $\tau_{(1,+),(2,-)}$ を書き下せ (定義域, 値域も求めよ). また $\tau_{(1,+),(2,-)}$ が C^∞-級写像であることを示せ.

(4) $\mathcal{A}_0$ が S^1 の C^∞-atlas であることを認める.

$$f : S^1 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1 x_2$$

とおく. このとき, $f \in C^\infty(S^1; \mathcal{A}_0)$ となることを示せ.

問 39. $\mathcal{A}_0$ を位相空間 M 上の C^∞-atlas とする. $C^\infty(M; \mathcal{A}_0)$ が $C^0(M)$ の部分 $\mathbb{R}$-代数であることを示せ (講義 Proposition 9.9). (Hint: Proposition 6.17 および部分 $\mathbb{R}$-代数についての一般論 (補足プリント参照) を用いてよい)

問 40. $\mathcal{A}_0$ を位相空間 M 上の n 次元 C^∞-atlas とする (講義: Proposition 9.13).

(1) $[\mathcal{A}_0]$ が M 上の n 次元 C^∞-atlas であることを示せ.

(2) $[\mathcal{A}_0]$ が M 上の n 次元 C^∞-atlas として極大であることを示せ.

(3) $\mathcal{A}_0$ を含む n 次元極大 C^∞-atlas は $[\mathcal{A}_0]$ のみであることを示せ.

問 41. $\mathcal{A}$ を位相空間 M 上の n 次元極大 C^∞-atlas とする. このとき連続関数 $f \in C^0(M)$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ (講義: Corollary 9.18):

条件 (i): $f \in C^\infty(M; \mathcal{A})$.

条件 (ii): 任意の $p \in M$ について, $(O, U, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ であって, $f \circ \boldsymbol{x}^{-1} \in C^\infty(U)$ となるものが存在する.

(Hint: (ii) を仮定して (i) を示すパートについて:) 各 $p \in M$ について, $(O_p, U_p, \boldsymbol{x}^p) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ を $p \in O_p$ かつ $f \circ (\boldsymbol{x}^p)^{-1} \in C^\infty(U_p)$ となるようにそれぞれ選ぶ. このとき $\mathcal{A}_0 = \{(O_p, U_p, \boldsymbol{x}^p) \mid p \in M\}$ が M 上の C^∞-atlas であって, $[\mathcal{A}_0] = \mathcal{A}$ となることを示せば, Theorem 9.16 が使える.)

裏へつづく

問 42. (重要) $\varphi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ ($n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) を C^∞-級写像とする．また $q \in \varphi(\mathbb{R}^{n+k})$ を固定し，$S_q := \varphi^{-1}(q)$ とおく．ここで任意の $p \in S_q$ について，$(d\varphi)_p : T_p\mathbb{R}^{n+k} \to T_q\mathbb{R}^k$ が全射であるとする．

(1)
$$\mathcal{A}_0 := \{(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{LC}(S_q; \mathbb{R}^n) \mid (O, U, \boldsymbol{u}) \text{ は } \mathbb{R}^{n+k} \text{ 内で正則 }\}$$
とおく．このとき $\mathcal{A}_0$ が S_q 上の n 次元 C^∞-atlas となることを示せ．(講義中のどのような定理を用いたか述べよ)．

(2) n 次元 C^∞-級多様体 $S_q = (S_q, [\mathcal{A}_0])$ について考える．D を $\mathbb{R}^{n+k}$ の開集合であって，$S_q \subset D$ となるものとする．このとき，任意の $\tilde{f} \in C^\infty(D)$ について，$f := \tilde{f}|_{S_q}$ は $(S_q, [\mathcal{A}_0])$ 上 C^∞-級であること (i.e. $f \in C^\infty(S_q)$) を示せ．

問 43. (重要) $M = (M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞-級多様体とする．$p \in M$ および $(O, U, \boldsymbol{x}), (O', V, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{A}$ with $p \in O \cap O'$ を固定する．

(1) 各 $j = 1, \ldots, n$ について，写像
$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_j}\right)_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$
の定義を述べ，$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i}\right)_p \in T_pM$ となることを示せ．

(2) (期末試験予告問題:発表なし) 各 $j = 1, \ldots, n$ について，
$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_j}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} ((J\tau_{\boldsymbol{xy}})_{\boldsymbol{x}(p)})_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}_i}\right)_p$$
となることを示せ (講義: Theorem 10.4; Hint: Proposition 5.12 を用いる)．ただし以下の Observation A を用いてよい:

Observation A: $q \in U_0 \subset U \subset \mathbb{R}^n$ (U, U_0 は open in $\mathbb{R}^n$) とし，$g \in C^\infty(U)$ とする．このとき
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q (g) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q (g|_{U_0}) \quad (\text{in } \mathbb{R}).$$

問 44. (重要) $M = (M, \mathcal{A})$ を 3 次元 C^∞-級多様体とする．$p \in M$ とし，$(O, U, \boldsymbol{x}), (O', V, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{A}$ with $p \in O \cap O'$ が以下を満たすとする:

- $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x}(p) = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{y}(p) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
- $\boldsymbol{x}(O \cap O') = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $\boldsymbol{y}(O \cap O') = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$,
- $\tau_{\boldsymbol{xy}} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}(x_1, x_2, x_3)$.

(1) $f \in C^\infty(M)$ が
$$f \circ \boldsymbol{x}^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{2x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$
かつ
$$f \circ \boldsymbol{y}^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (y_1, y_2, y_3) \mapsto \frac{-2y_1(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1)}{1 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$$
となるとする．このとき $\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_j}\right)_p (f) \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, 3$) および $\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}_i}\right)_p (f) \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$) をそれぞれ求めよ．

(2) 座標変換 $\tau_{\boldsymbol{xy}}$ の $\boldsymbol{x}(p)$ におけるヤコビ行列 $(J\tau_{\boldsymbol{xy}})_{\boldsymbol{x}(p)}$ を計算せよ．また $\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_j}\right)_p$ ($j = 1, 2, 3$) をそれぞれ $\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}_i}\right)_p$ ($i = 1, 2, 3$) の一次結合で書き表せ．