2019 年前期 幾何学 A 期末試験 模擬問題

諸注意:

- この試験は持ち込み不可です. 勉強道具, 外部と連絡が取れる機器 (スマホなど) はカバンなどにしまってください (音がするものは電源を切ること). くれぐれもカンニングや疑わしい行為をしないこと.
- 退出は試験開始 60 分後から認めます. (試験終了 5 分前から試験終了後までの退出は認めません).
- 気分が悪い, トイレなどの一時退出を希望する際は手を挙げて知らせてください. 一時退出の際は, スマホなど外部と連絡が取れる機器は持ち出さないようにしてください.

試験について:

- 大問は全部で五つあります (140 点満点). 最初の四つ (100 点満点) を解いてから最後の大問 (40 点満点) を解くことをおすすめします.
- 証明問題については, 「何を示せばいいのか」, 「どういう方針なのか」などの指針をできるだけ明示的に書いてください. 完全な解答になっていない場合には, 「指針」をみて部分点を出します.
- 丁寧で読みやすい解答には満点を超えて加点する場合があります.

各種記号や定義の簡易リスト (抜粋):

- 位相空間が第二加算公理を満たすとは, 可算開基を持つこと.
- $\mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n) := \{(O,U,\boldsymbol{x}) \mid (O,U,\boldsymbol{x})$ は M 上の n 次元局所座標系 $\}$.
- $\tau_{\boldsymbol{xy}}$: $(O,U,\boldsymbol{x})$ から $(O',V,\boldsymbol{y})$ への座標変換.
- $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ が n 次元 C^∞-atlas であるとは, 以下の二条件を満たすこと:
  条件 (i): $\bigcup_{(O,U,\boldsymbol{x})\in\mathcal{A}_0} O = M$.
  条件 (ii): 任意の $(O,U,\boldsymbol{x})$, $(O',V,\boldsymbol{y}) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ with $O\cap O' \neq \emptyset$ について, $\tau_{\boldsymbol{xy}}$, $\tau_{\boldsymbol{yx}}$ がともに C^∞-diffeo.
- $[\mathcal{A}_0] \subset \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ を以下のものとする:

$$[\mathcal{A}_0] := \{(O,U,\boldsymbol{x}) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n) \mid \text{任意の } (O',V,\boldsymbol{y}) \in \mathcal{A}_0 \text{ with } O\cap O' \neq \emptyset \text{ について } \tau_{\boldsymbol{xy}}, \tau_{\boldsymbol{yx}} \text{ は共に } C^\infty\text{-diffeo}\}.$$

- $C^\infty(M) := \{f \in C^0(M) \mid f$ は $(M,\mathcal{A})$ 上 C^∞-級 $\}$.
- $T_pM := \{\eta : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid \eta$ は線型で, p におけるライプニッツ則を満たす $\}$
  (M の p における接空間)
- $f \in C^\infty(M)$, $(O,U,\boldsymbol{x}) \in \mathcal{A}$, $p \in O$ について,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_j}\right)_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{\boldsymbol{x}(p)} (f\circ(\boldsymbol{x}^{-1})).$$

- 写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ が C^∞-級写像であるとは, 任意の $f \in C^\infty(M_2)$ について, $\varphi^*(f) := f\circ\varphi \in C^\infty(M_1)$ となること.
- $\mathbb{R}^{n+k}$ の正則部分多様体 S および $p \in S$ について, 包含写像 $\iota : S \to \mathbb{R}^{n+k}$ は C^∞-級写像であり, その微分 $(d\iota)_p : T_pS \to T_p\mathbb{R}^{n+k}$ は単射である. そこで T_pS を $(d\iota)_p(T_pS)$ と同一視することにより, T_pS を $T_p\mathbb{R}^{n+k}$ の線型部分空間とみなす.

$\boxed{1}$ (25 点満点)

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, M を空でない位相空間とする.

問 1. (5 点) $(O, U, \boldsymbol{x})$, $(O', V, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ with $O \cap O' \neq \emptyset$ とする. このとき, 座標変換 $\tau_{\boldsymbol{xy}}$, $\tau_{\boldsymbol{yx}}$ の定義を述べよ (定義域, 値域も書くこと).

問 2. (5 点) 座標変換を表す絵を描け.

問 3. (5 点) $(M, \mathcal{A})$ が n 次元 C^∞-級多様体であることの定義を述べよ.

問 4. (5 点) $(M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞-級多様体とする. M 上の連続関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が $(M, \mathcal{A})$ 上 C^∞-級であることの定義を述べよ.

問 5. (5 点) $(M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞-級多様体とする. $f, g \in C^\infty(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ について, 以下の関数達の定義を述べよ:

f, g の和: $f + g : M \to \mathbb{R}$,

f の λ 倍: $\lambda f : M \to \mathbb{R}$,

f, g の積: $f \cdot g : M \to \mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ (25 点満点)

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $M = (M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞-級多様体とする. また $p \in M$ および $(O, U, \boldsymbol{x})$, $(O', V, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{A}$ with $p \in O \cap O'$ を固定する.

問 1. (15 点)

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_j}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} ((J\tau_{\boldsymbol{xy}})_{\boldsymbol{x}(p)})_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}_j}\right)_p$$

を示せ. ただし $(J\tau_{\boldsymbol{xy}})_{\boldsymbol{x}(p)}$ は $\tau_{\boldsymbol{xy}}$ の $\boldsymbol{x}(p)$ におけるヤコビ行列を表し, $((J\tau_{\boldsymbol{xy}})_{\boldsymbol{x}(p)})_{ij}$ は $(J\tau_{\boldsymbol{xy}})_{\boldsymbol{x}(p)}$ の (i,j)-成分を表すものとする. また必要であれば, 以下の Observation A を用いてよい:

Observation A: $q \in U_0 \subset U \subset \mathbb{R}^n$ (U, U_0 は open in $\mathbb{R}^n$) とし, $g \in C^\infty(U)$ とする. このとき

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q (g) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q (g|_{U_0}) \quad (\text{in } \mathbb{R}).$$

問 2. 上の設定において, 以下が成り立っているとする:

- $n = 2$,
- $U = V = \mathbb{R}^2$,
- $\boldsymbol{x}(p) = (2, 0)$, $\boldsymbol{y}(p) = (\frac{1}{2}, 0)$,
- $\boldsymbol{x}(O \cap O') = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq 0\}$, $\boldsymbol{y}(O \cap O') = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \neq 0\}$.
- $\tau_{\boldsymbol{xy}} : \boldsymbol{x}(O \cap O') \to \boldsymbol{y}(O \cap O')$, $(x_1, x_2) \mapsto (\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1})$.

(1) (5 点) このとき $(J\tau_{\boldsymbol{xy}})_{\boldsymbol{x}(p)}$ を求めよ. また $\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1}\right)_p$, $\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2}\right)_p$ をそれぞれ $\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}_1}\right)_p$, $\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}_2}\right)_p$ の一次結合として表せ (途中計算は述べなくてもよい).

(2) (5 点) M 上の C^∞-級関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が,

$$f \circ (\boldsymbol{x}^{-1}) : U \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2},$$
$$f \circ (\boldsymbol{y}^{-1}) : V \to \mathbb{R},\ (y_1, y_2) \mapsto \frac{y_1^2}{1 + y_1^2 + y_2^2}$$

を満たすとする. このとき

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1}\right)_p (f),\ \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2}\right)_p (f),\ \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}_1}\right)_p (f),\ \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}_2}\right)_p (f) \in \mathbb{R}$$

をそれぞれ求めよ (途中計算は述べなくてもよい).

$\boxed{3}$ (25 点満点)

$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1,\ x_3 \geq 1\} \subset \mathbb{R}^3$ とする. M_1 上の 2 次元局所座標系 $(O, U, \boldsymbol{u})$ を以下で定める:

- $O = M_1$, $U = \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} : O \to U,\ x \mapsto (x_1, x_2)$.

このとき $\mathcal{A}_0 := \{(O, U, \boldsymbol{u})\}$ は M_1 上の 2 次元 C^∞-atlas となり, $\mathcal{A}_1 := [\mathcal{A}_0]$ は M_1 上の極大 2 次元 C^∞-atlas となる. この意味で, $M_1 = (M_1, \mathcal{A}_1)$ を 2 次元 C^∞-級多様体とみなす. また

$$M_2 = S^2 := \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

とし, $M_2 = (S^2, \mathcal{A}_{S^2})$ を講義中に述べた意味で 2 次元 C^∞-級多様体とみなす. ここで, 写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ を

$$\varphi : M_1 \to M_2,\ x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

として定める.

問 1. (5 点) φ が写像として well-defined であること, すなわち任意の $x \in M_1$ について,

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \neq 0$$

かつ

$$\frac{x}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \in M_2$$

となることを示せ.

問 2. (5 点) $\varphi : M_1 \to M_2$ が C^∞-級写像であることを示したい. 何を示せば十分か述べよ.

問 3. (5 点) $(O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{A}_{S^2}$ を以下のものとする.

- $O' = \{y \in M_2 \mid y_3 > 0\} \subset M_2 = S^2$,
- $V = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_1^2 + v_2^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$,
- $\boldsymbol{v} : O' \to V,\ y \mapsto (y_1, y_2)$.

このとき任意の $p \in M_1$ について, $\varphi(p) \in O'$ となることを示せ.

問 4. (10 点) $\varphi : M_1 \to M_2$ が C^∞-級写像であることを示せ.

$\boxed{4}$ (25 点満点)

$M = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ ($\subset \mathbb{R}^3$) とおく. M 上の局所座標系 $(O_+, U_+, \boldsymbol{u}^+)$, $(O_-, U_-, \boldsymbol{u}^-)$, $(O'_+, V_+, \boldsymbol{v}^+)$, $(O'_-, V_-, \boldsymbol{v}^-)$ を以下で定める.

- $O_+ = \{x \in M \mid x_1 > 0\} \subset M,\quad U_+ = \{(u_1^+, u_2^+) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < u_1^+ < 1\} \subset \mathbb{R}^2,$
  $\boldsymbol{u}^+ : O_+ \to U_+,\ x \mapsto (x_2, x_3).$
- $O_- = \{x \in M \mid x_1 < 0\} \subset M,\quad U_- = \{(u_1^-, u_2^-) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < u_1^- < 1\} \subset \mathbb{R}^2,$
  $\boldsymbol{u}^- : O_- \to U_-,\ x \mapsto (x_2, x_3).$
- $O'_+ = \{x \in M \mid x_2 > 0\} \subset M,\quad V_+ = \{(v_1^+, v_2^+) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < v_1^+ < 1\} \subset \mathbb{R}^2,$
  $\boldsymbol{v}^+ : O'_+ \to V_+,\ x \mapsto (x_1, x_3).$
- $O'_- = \{x \in M \mid x_2 < 0\} \subset M,\quad V_- = \{(v_1^-, v_2^-) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < v_1^- < 1\} \subset \mathbb{R}^2,$
  $\boldsymbol{v}^- : O'_- \to V_-,\ x \mapsto (x_1, x_3).$

このとき $\mathcal{A}_0 = \{(O_\pm, U_\pm, \boldsymbol{u}^\pm), (O'_\pm, V_\pm, \boldsymbol{v}^\pm)\}$ は M 上の 2 次元 C^∞-atlas であり, $M = (M, [\mathcal{A}_0])$ は 2 次元 C^∞-級多様体となる. またこの $M = (M, [\mathcal{A}_0])$ は $\mathbb{R}^3$ 内の 2 次元正則部分多様体である.

以下の問に答えよ.

問 1. (5 点) M ($\subset \mathbb{R}^3$) の概形を描け.

問 2. (5 点) 上で与えた $(O_+, U_+, \boldsymbol{u}^+)$, $(O'_+, V_+, \boldsymbol{v}^+)$ について, 座標変換 $\tau_{\boldsymbol{u}^+\boldsymbol{v}^+}$ を書き下せ (定義域と値域も具体的に求めること).

問 3. (5 点) M 上の C^∞-級曲線

$$c_\alpha : \mathbb{R} \to M,\ t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$$
$$c_\beta : \mathbb{R} \to M,\ t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$$

について考える. また M 上の C^∞-級関数 f を

$$f : M \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 x_3$$

とする. このとき

$$(\dot{c_\alpha}(0))(f),\ (\dot{c_\beta}(0))(f) \in \mathbb{R}$$

をそれぞれ求めよ.

問 4. (10 点) $p = (1, 0, 0) \in M$ とする. このとき

$$T_pM = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \,\middle|\, a_1 = 0 \right\} \subset T_p\mathbb{R}^3$$

となることを示せ. ただし

$$T_p\mathbb{R}^3 = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \,\middle|\, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

と書くことにする. また講義中に述べた Fact, Theorem, Proposition についてはどれも用いてよいこととする.

$\boxed{5}$ (40 点満点)

$\mathbb{R}^4$ の部分集合 S を

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid xw - yz = 1\}\ (\subset \mathbb{R}^4)$$

と定める.

以下の問に答えよ. ただし講義で紹介した Fact, Theorem, Proposition などについてはどれも用いてよいこととする.

問 1. (10 点) S は $\mathbb{R}^4$ の 3 次元正則部分多様体とみなせることを示せ.

問 2. (10 点) $p = (1, 0, 0, 1) \in S$ とする. このとき

$$T_p\mathbb{R}^4 = \left\{ a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + a_2 \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + a_3 \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p + a_3 \left(\frac{\partial}{\partial w}\right)_p \;\middle|\; a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

の線型部分空間 T_pS を決定せよ.

問 3. (10 点) 次の写像が C^∞-級であることを示せ:

$$\psi : S \to S,\ (x, y, z, w) \mapsto (w, -y, -z, x)$$

問 4. (10 点) 上記の C^∞-級写像 ψ と $p = (1, 0, 0, 1)$ について

$$(d\psi)_p : T_pS \to T_pS$$

を具体的に書き下せ.