

2019 年前期 幾何学 A 期末試験 (8/7 実施)

諸注意:

- この試験は持ち込み不可です。勉強道具、外部と連絡が取れる機器 (スマホなど) はカバンなどにしまってください (音がするものは電源を切ること)。くれぐれもカンニングや疑わしい行為をしないこと。
- 退出は試験開始 60 分後から認めます。(試験終了 5 分前から試験終了後までの退出は認めません)。
- 気分が悪い、トイレなどの一時退出を希望する際は手を挙げて知らせてください。一時退出の際は、スマホなど外部と連絡が取れる機器は持ち出さないようにしてください。

試験について:

- 大問は全部で五つあります (145 点満点)。最初の四つ (105 点満点) を解いてから最後の大問 (40 点満点) を解くことをおすすめします。
- 証明問題については、「何を示せばいいのか」、「どういう方針なのか」などの指針をできるだけ明示的に書いてください。完全な解答になっていない場合には、「指針」をみて部分点を出します。
- 丁寧に読みやすい解答には満点を超えて加点する場合があります。

各種記号や定義の簡易リスト (抜粋):

- 位相空間が第二加算公理を満たすとは、可算開基を持つこと。
- $\mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n) := \{(O, U, \mathbf{x}) \mid (O, U, \mathbf{x}) \text{ は } M \text{ 上の } n \text{ 次元局所座標系}\}$ 。
- $\tau_{\mathbf{x}\mathbf{y}} : (O, U, \mathbf{x})$  から  $(O', V, \mathbf{y})$  への座標変換。
- $f \in C^0(M)$  が  $(O, U, \mathbf{x})$  上  $C^\infty$ -級であるとは、 $f \circ \mathbf{x}^{-1} \in C^\infty(U)$  となること。
- $M$  上の  $C^\infty$ -atlas  $\mathcal{A}_0$  について、 $[\mathcal{A}_0] \subset \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$  を以下のものとする:

$$[\mathcal{A}_0] := \{(O, U, \mathbf{x}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n) \mid \text{任意の } (O', V, \mathbf{y}) \in \mathcal{A}_0 \text{ with } O \cap O' \neq \emptyset \text{ について } \tau_{\mathbf{x}\mathbf{y}}, \tau_{\mathbf{y}\mathbf{x}} \text{ は共に } C^\infty\text{-diffeo}\}.$$

- $C^\infty(M) := \{f \in C^0(M) \mid f \text{ は } (M, \mathcal{A}) \text{ 上 } C^\infty\text{-級}\}$ 。
- $T_p M := \{\eta : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid \eta \text{ は線型で, } p \text{ におけるライプニッツ則を満たす}\}$   
( $M$  の  $p$  における接空間)
- $f \in C^\infty(M)$ ,  $(O, U, \mathbf{x}) \in \mathcal{A}$ ,  $p \in O$  について,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}\right)_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{\mathbf{x}(p)} (f \circ \mathbf{x}^{-1}).$$

- 写像  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  が  $C^\infty$ -級写像であるとは、任意の  $f \in C^\infty(M_2)$  について、 $\varphi^*(f) := f \circ \varphi \in C^\infty(M_1)$  となること。
- $\mathbb{R}^{n+k}$  の正則部分多様体  $S$  および  $p \in S$  について、包含写像  $\iota : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  は  $C^\infty$ -級写像であり、その微分  $(d\iota)_p : T_p S \rightarrow T_p \mathbb{R}^{n+k}$  は単射である。そこで  $T_p S$  を  $(d\iota)_p(T_p S)$  と同一視することにより、 $T_p S$  を  $T_p \mathbb{R}^{n+k}$  の線型部分空間とみなす。

1 (25 点満点)

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  とし,  $M$  を空でない位相空間とする.

問 1. (5 点)  $(O, U, \mathbf{x}), (O', V, \mathbf{y}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$  with  $O \cap O' \neq \emptyset$  とする. このとき, 座標変換  $\tau_{\mathbf{y}\mathbf{x}}, \tau_{\mathbf{x}\mathbf{y}}$  の定義を述べよ (定義域, 値域も書くこと).

問 2. (5 点) 座標変換を表す絵を描け.

問 3. (5 点)  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$  が  $M$  上の  $n$  次元  $C^\infty$ -atlas であることの定義を述べよ.

問 4. (5 点)  $(M, \mathcal{A})$  が  $n$  次元  $C^\infty$ -級多様体であることの定義を述べよ.

問 5. (5 点)  $(M, \mathcal{A})$  を  $n$  次元  $C^\infty$ -級多様体とする. また  $p \in M$  とする.  $\eta, \zeta \in T_p M, \lambda \in \mathbb{R}$  について, 以下の写像達の定義を述べよ:

$$\eta, \zeta \text{ の和: } \eta + \zeta : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\eta \text{ の } \lambda \text{ 倍: } \lambda\eta : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

2 (25 点満点)

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  とし,  $M = (M, \mathcal{A})$  を  $n$  次元  $C^\infty$ -級多様体とする. また  $p \in M$  および  $(O, U, \mathbf{x}), (O', V, \mathbf{y}) \in \mathcal{A}$  with  $p \in O \cap O'$  を固定する.

問 1. (15 点)  $j = 1, \dots, n$  を固定する.

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p = \sum_{i=1}^n ((J\tau_{\mathbf{x}\mathbf{y}})_{\mathbf{x}(p)})_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \right)_p$$

を示せ. ただし  $(J\tau_{\mathbf{x}\mathbf{y}})_{\mathbf{x}(p)}$  は  $\tau_{\mathbf{x}\mathbf{y}}$  の  $\mathbf{x}(p)$  におけるヤコビ行列を表し,  $((J\tau_{\mathbf{x}\mathbf{y}})_{\mathbf{x}(p)})_{ij}$  は  $(J\tau_{\mathbf{x}\mathbf{y}})_{\mathbf{x}(p)}$  の  $(i, j)$ -成分を表すものとする. また必要であれば, 以下の Observation A を用いてよい:

Observation A:  $q \in U_0 \subset U \subset \mathbb{R}^n$  ( $U, U_0$  は open in  $\mathbb{R}^n$ ) とし,  $g \in C^\infty(U)$  とする. このとき

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q (g) = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q (g|_{U_0}) \quad (\text{in } \mathbb{R}).$$

問 2. 上の設定において, 以下が成り立っているとする:

- $n = 2$ ,
  - $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2, V = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ ,
  - $\mathbf{x}(p) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \mathbf{y}(p) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,
  - $\mathbf{x}(O \cap O') = \{(x_1, x_2) \in U \mid x_1 > 0\}, \mathbf{y}(O \cap O') = \{(y_1, y_2) \in V \mid y_2 > 0\}$ .
  - $\tau_{\mathbf{x}\mathbf{y}} : \mathbf{x}(O \cap O') \rightarrow \mathbf{y}(O \cap O'), (x_1, x_2) \mapsto (x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$ .
- (1) (5 点) このとき  $(J\tau_{\mathbf{x}\mathbf{y}})_{\mathbf{x}(p)}$  を求めよ. また  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p$  をそれぞれ  $\left( \frac{\partial}{\partial y_1} \right)_p, \left( \frac{\partial}{\partial y_2} \right)_p$  の一次結合として表せ (途中計算は述べなくてもよい).
- (2) (5 点)  $M$  上の  $C^\infty$ -級関数  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  が,

$$\begin{aligned} f \circ (\mathbf{x}^{-1}) : U &\rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto 1 - x_1^2 - x_2^2, \\ f \circ (\mathbf{y}^{-1}) : V &\rightarrow \mathbb{R}, (y_1, y_2) \mapsto y_2^2 \end{aligned}$$

を満たすとする. このとき

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p (f), \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p (f), \left( \frac{\partial}{\partial y_1} \right)_p (f), \left( \frac{\partial}{\partial y_2} \right)_p (f) \in \mathbb{R}$$

をそれぞれ求めよ (途中計算は述べなくてもよい).

**3** (30 点満点)

$X = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  とおく.  $X$  上の同値関係  $\sim$  を以下で定める:

$$x \sim y \text{ in } X \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ such that } y = \lambda x.$$

この同値関係による  $X$  の商空間を  $P(\mathbb{R}^3)$  と書く.

各  $i = 1, 2, 3$  について,  $(O_i, U_i, \mathbf{u}^i)$  を以下のように定める:

- $O_i := \{[x] \in P(\mathbb{R}^3) \mid x \in X, x_i \neq 0\} \subset P(\mathbb{R}^3)$ ,
- $U_i := \mathbb{R}^2$ ,
- $\mathbf{u}^i : O_i \rightarrow U_i, [x] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_3)$ .

以下  $(O_i, U_i, \mathbf{u}^i)$  が  $P(\mathbb{R}^3)$  上の 2 次元局所座標系であることは認めてよい.

問 1. (5 点)  $\mathbf{u}^i : O_i \rightarrow U_i$  の逆写像を求めよ (結論以外は省略してよい).

問 2. (5 点)  $\bigcup_{i=1}^3 O_i = P(\mathbb{R}^3)$  を示せ.

問 3. (10 点)  $P(\mathbb{R}^3)$  上の 2 次元局所座標系  $(O_1, U_1, \mathbf{u}^1)$  から  $(O_2, U_2, \mathbf{u}^2)$  への座標変換を  $\tau_{12}$  と書くことにする.  $\tau_{12}$  を書き下せ (定義域と値域も求めよ).

問 4. (10 点) 以下,  $\mathcal{A}_0 := \{(O_i, U_i, \mathbf{u}^i) \mid i = 1, 2, 3\}$  が  $P(\mathbb{R}^3)$  上の  $C^\infty$ -atlas であることを認めてよい. このとき, 写像

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow P(\mathbb{R}^3), (y_1, y_2) \mapsto [(y_1, y_2, y_1^2 + 1)]$$

が  $C^\infty$ -級写像であることを示せ. ただし  $\mathbb{R}^2$  上の 2 次元局所座標系  $(O, U, \mathbf{y})$  を

- $O = \mathbb{R}^2, U = \mathbb{R}^2, \mathbf{y} : O \rightarrow U, (y_1, y_2) \mapsto (y_1, y_2)$ ,

とおき,  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}^2} := \{(O, U, \mathbf{y})\}$  と定めることで,  $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2, \mathcal{A}_{\mathbb{R}^2})$  を 2 次元  $C^\infty$ -級多様体とみなすものとし, また  $\mathcal{A}_{P(\mathbb{R}^3)} := [\mathcal{A}_0]$  と定めることにより,  $P(\mathbb{R}^3) = (P(\mathbb{R}^3), \mathcal{A}_{P(\mathbb{R}^3)})$  を 2 次元  $C^\infty$ -級多様体とみなすものとする.

4 (25 点満点)

$$S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} (\subset \mathbb{R}^3)$$

とし,  $S^2 = (S^2, \mathcal{A}_{S^2})$  を講義中に述べた意味で  $\mathbb{R}^3$  内の 2 次元正則部分多様体とみなす. また  $\mathbb{R}^3$  上の  $C^\infty$ -級関数

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2$$

について考える. 以下, 講義中に紹介した Fact, Theorem, Proposition などはいずれも用いてよい.

問 1. (5 点)  $f$  の  $S^2$  への制限を

$$g = f|_{S^2} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$$

とおく. また  $(O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}_{S^2}$  を以下のものとする:

- $O = \{x \in S^2 \mid x_1 > 0\} \subset S^2$ ,  $U = \{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 + u_2^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ ,  
 $\mathbf{u} : O \rightarrow U, x \mapsto (x_2, x_3)$ .

このとき  $U$  上の関数  $g \circ \mathbf{u}^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}$  を書き下せ.

問 2. (5 点)  $p \in \mathbb{R}^3$  とする.  $p \neq (0, 0, 0)$  のとき,  $f$  の  $p$  における全微分

$$(df)_p : T_p \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$$

の階数は 0 とならないことを示せ.

問 3. (5 点)  $p = (p_1, p_2, p_3) \in S^2$  を固定する. また  $W_p \subset T_p \mathbb{R}^3$  を

$$W_p = \left\{ \sum_{i=1}^3 a_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0 \right\} \subset T_p \mathbb{R}^3$$

とおく, このとき  $T_p S^2 \subset W_p$  となることを示せ.

問 4. (5 点) 上の問の設定において,  $p = (0, 0, 1)$  とする. このとき  $T_p S^2 \supset W_p$  を示せ. ただし, 以下の  $c_\alpha, c_\beta$  が  $S^2$  上の  $C^\infty$ -級曲線であることは証明抜きで用いてよい:

- $c_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow S^2, t \mapsto (\sin t, 0, \cos t)$ ,
- $c_\beta : \mathbb{R} \rightarrow S^2, t \mapsto (0, \sin t, \cos t)$ .

問 5. (5 点) 以下,  $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  が  $C^\infty$ -級写像であることは認めてよい. ここで  $p = (0, 0, 1)$  としたとき,  $g$  の  $p$  における微分

$$(dg)_p : T_p S^2 \rightarrow T_{g(p)} \mathbb{R}$$

の階数が 0 であることを示せ.

5 (40 点満点)

$\mathbb{R}^4$  の部分集合  $S$  を

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid xw - yz = 1\} (\subset \mathbb{R}^4)$$

と定める. また  $\mathbb{R}^3$  の部分集合  $M$  を

$$M = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 - c^2 = -1\} (\subset \mathbb{R}^3)$$

と定める.

以下の問に答えよ. ただし講義で紹介した Fact, Theorem, Proposition などについてはどれも用いてよいこととする.

問 1. (10 点)  $S$  は  $\mathbb{R}^4$  の 3 次元正則部分多様体とみなせることを示せ.

問 2. (10 点)  $p = (1, 0, 0, 1) \in S$  とする. このとき

$$T_p \mathbb{R}^4 = \left\{ a_1 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)_p + a_2 \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)_p + a_3 \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)_p + a_4 \left( \frac{\partial}{\partial w} \right)_p \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

の線型部分空間  $T_p S$  を決定せよ.

問 3. (10 点) 以下  $M$  が  $\mathbb{R}^3$  の 2 次元正則部分多様体であることは認めてよい. 次の写像が well-defined であり,  $C^\infty$ -級であることを示せ:

$$\psi : S \rightarrow M, (x, y, z, w) \mapsto (xz + yw, \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - z^2 - w^2), \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)).$$

問 4. (10 点) 上記の  $C^\infty$ -級写像  $\psi$  と  $p = (1, 0, 0, 1)$  について,  $\psi$  の  $p$  における微分

$$(d\psi)_p : T_p S \rightarrow T_{\psi(p)} M$$

を考える.  $T_p S$  の部分空間

$$\text{Ker} (d\psi)_p = \{\eta \in T_p S \mid (d\psi)_p(\eta) = 0\}$$

を決定せよ.