# 2019年前期 幾何学A: ベクトル空間と $\mathbb{R}$-代数 補足プリント

幾何学Aではこのプリントでまとめて述べる命題はすべて既知であるとする. (すなわち中間試験, 期末試験などでは, 以下の命題を証明抜きで用いてよい).

## 1 ベクトル空間についての補足

以下, $V$ を実ベクトル空間とする[1].

**Theorem 1.1.** *$U$ を任意の集合とする. このとき $\mathrm{Map}(U,V)$ は実ベクトル空間となる. ただし $\mathrm{Map}(U,V)$ 上の和とスカラー倍は以下のものとする:*

**和:** 各 $f,g \in \mathrm{Map}(U,V)$ について,

$$f+g : U \to V,\ x \mapsto f(x)+g(x).$$

**スカラー倍:** 各 $f \in \mathrm{Map}(U,V)$, 各 $\lambda \in \mathbb{R}$ について,

$$\lambda f : U \to V,\ x \mapsto \lambda f(x).$$

**Remark 1.2.** *上記の実ベクトル空間 $\mathrm{Map}(U,V)$ は $V^U$ ($U$ で添え字付けられた $V$ の直積空間) と書かれることが多い. また $U$ が有限集合で $V$ が有限次元のとき, $\mathrm{Map}(U,V)$ の次元は $(\#U)\cdot \dim V$ となる.*

実ベクトル空間 $W$ について

$$\mathrm{Hom}(W,V) := \{ f : W \to V \mid f \text{ は線型 } \}$$

とおく.

**Proposition 1.3.** *$W$ を任意の実ベクトル空間とする. このとき $\mathrm{Hom}(W,V)$ は $\mathrm{Map}(W,V)$ の線型部分空間である. 特に $\mathrm{Hom}(W,V)$ は実ベクトル空間である.*

**Remark 1.4.** *$V$, $W$ が有限次元の場合, $\mathrm{Hom}(W,V)$ の次元は $(\dim W)\cdot(\dim V)$ となる. またこの場合, テンソル積の言葉で $W^*\otimes V$ と書かれる空間と $\mathrm{Hom}(W,V)$ は一致する (自然な同型を持つ). $V$, $W$ のどちらかが無限次元の場合には, 通常 "位相ベクトル空間" として扱うので, テンソルの言葉を用いるときは注意が必要.*

$\mathrm{Hom}(V,V)$ を通常 $\mathrm{End}(V)$ と書く.

**Proposition 1.5.** *$\mathrm{End}(V)$ は写像の合成について結合的 $\mathbb{R}$-代数となる ($\mathbb{R}$-代数の定義は Section 2 をみよ).*

[1] 以下で紹介するすべての命題は一般の可換体上のベクトル空間に関する命題として書き直すことができるが, ここでは体が実数である場合に限って紹介する

# 2　$\mathbb{R}$-代数についての補足

**Definition 2.1.** 実ベクトル空間 $A$ に, 積と呼ばれる二項演算

$$A \times A \to A,\ (a,b) \mapsto a \cdot b$$

が定まっており, 写像として双線型であるとき, $(A, \cdot)$ を $\mathbb{R}$-代数という.

**Remark 2.2.** 流儀によっては, 単に "$\mathbb{R}$-代数" といった場合でも, 文脈によっては "結合性" や "単位的であること" (以下をみよ) を仮定されている場合があるので注意すること.

**Definition 2.3.** $A$ を $\mathbb{R}$-代数とする.

- $A$ が結合的であるとは,

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad (\textit{ for any } a, b, c \in A)$$

  が成り立つこと.

- $A$ が可換であるとは,

$$a \cdot b = b \cdot a \quad (\textit{ for any } a, b \in A)$$

  が成り立つこと.

- $A$ が単位的であるとは, $A$ の元 $1_A \in A$ であって,

$$a \cdot 1_A = a = 1_A \cdot a \quad (\textit{ for any } a \in A)$$

  が成り立つものが存在すること (このような $1_A \in A$ は一意).

## 2.1　部分 $\mathbb{R}$-代数について

以下, $A = (A, \cdot)$ を $\mathbb{R}$-代数とする.

**Definition 2.4.** $A$ の線型部分空間 $B$ が以下の条件を満たすとき, $B$ を $A$ の部分 $\mathbb{R}$-代数とよぶ.

**条件:** $B$ は $A$ の積で閉じる (*i.e.* 任意の $b_1, b_2 \in B$ について, $b_1 \cdot b_2 \in B$).

**Proposition 2.5.** $B$ を $A$ の部分 $\mathbb{R}$-代数とする.

1. $B$ は $A$ の積 (を $B$ に制限したもの) により $\mathbb{R}$-代数をなす.
2. $A$ が結合的であるなら $B$ も結合的.
3. $A$ が可換であるなら $B$ も可換.

**Remark 2.6.** $A$ が単位的であっても, 全ての部分 $\mathbb{R}$-代数 (定義に注意) が単位的であるとは限らない.

**Proposition 2.7.** $\{B_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ を $A$ の部分 $\mathbb{R}$-代数の族とする. このとき $\bigcap_{\xi \in \Xi} B_\xi$ は $A$ の部分 $\mathbb{R}$-代数となる.

## 2.2 $\mathbb{R}$-代数の直積

以下, $A$ を $\mathbb{R}$-代数とする.

**Theorem 2.8.** *$U$ を任意の集合とする. 実ベクトル空間 $\mathrm{Map}(U, A)$ は以下の "積" について $\mathbb{R}$-代数となる.*

**積:** 各 $f, g \in U \to A$ について,

$$f \cdot g : U \to A,\ \ x \mapsto f(x) \cdot g(x).$$

ただし $a \cdot b$ は $a, b \in A$ の $A$ における積を表すこととする.

**Remark 2.9.** *ベクトル空間の場合と同様 $\mathbb{R}$-代数 $\mathrm{Map}(U, A)$ を $A^U$ ($U$ で添え字付けられた直積) と書く場合がある.*

**Theorem 2.10.** *$U$ を任意の集合とする.*

1. *$A$ が結合的なら $\mathrm{Map}(U, A)$ も結合的.*
2. *$A$ が可換なら $\mathrm{Map}(U, A)$ も可換.*
3. *$A$ が単位的なら $\mathrm{Map}(U, A)$ も単位的.*

**Remark 2.11.** *$W$ を実ベクトル空間としたとき, $\mathrm{Hom}(W, V)$ は $\mathrm{Map}(W, A)$ の線型部分空間ではあるが, 一般には部分 $\mathbb{R}$-代数にはならないので注意すること (例えば $\mathrm{End}(\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ は写像の合成について結合的 $\mathbb{R}$-代数であるが, $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の部分 $\mathbb{R}$-代数という訳ではない).*