2019 年前期 幾何学 A 中間試験 (7/10 実施)

諸注意:

- この試験は持ち込み不可です. 勉強道具, 外部と連絡が取れる機器 (スマホなど) はカバンなどにしまってください (音がするものは電源を切ること). くれぐれもカンニングや疑わしい行為をしないこと.
- 退出は試験開始 60 分後から認めます. (試験終了 5 分前から試験終了後までの退出は認めません).
- 気分が悪い, トイレなどの一時退出を希望する際は手を挙げて知らせてください. 一時退出の際は, スマホなど外部と連絡が取れる機器は持ち出さないようにしてください.

試験について:

- 大問は全部で五つあります (140 点満点). 最初の四つ (100 点満点) を解いてから最後の大問 (40 点満点) を解くことをおすすめします.
- この試験の合格点は 60 点程度を想定しています (期末で頑張れば挽回可能).
- 証明問題については, 「何を示せばいいのか」, 「どういう方針なのか」などの指針をできるだけ明示的に書いてください. 完全な解答になっていない場合には, 「指針」をみて部分点を出します.

各種記号や定義の簡易リスト:

- $C^\infty(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f$ は C^∞-級関数 $\}$.
- $T_p(U) := \{\eta : C^\infty(U) \to \mathbb{R} \mid \eta$ は線型で, p におけるライプニッツ則を満たす $\}$.
- $\mathfrak{X}^\infty(U) := \{X : C^\infty(U) \to C^\infty(U) \mid X$ は線型で, 場のライプニッツ則を満たす $\}$.
- $$\mathfrak{X}^\infty(U) \ni \frac{\partial}{\partial x_i} : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i},$$
  $$T_p(U) \ni \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$
- $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ について,
  $$[X, Y] : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto X(Yf) - Y(Xf).$$
- 写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ が C^∞-級であるとは, 任意の $f \in C^\infty(U_2)$ について, $\varphi^*(f) := f \circ \varphi \in C^\infty(U_1)$ となること.
- $(d\varphi)_p : T_p(U_1) \to T_{\varphi(p)}(U_2),\ \eta \mapsto \eta \circ \varphi^*$.
- $S \subset \mathbb{R}^{n+k}$ について, S 上の n 次元局所座標系 $(O, U, \boldsymbol{u})$ が $\mathbb{R}^{n+k}$ 内で正則であるとは, $\mathbb{R}^{n+k}$ 内の開集合 $\widetilde{O}, \widetilde{U}$ および C^∞-diffeo (C^∞-級微分同相) $\phi : \widetilde{O} \to \widetilde{U}$ であって, 以下の条件 (i), (ii), (iii) を満たすものが存在することとする:

  条件 (i)　$\widetilde{O} \cap S = O$.

  条件 (ii)　$\widetilde{U} \cap \mathbb{R}^n = U$, ただし
  $$\mathbb{R}^n = \{(u_1, \ldots, u_n, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+k} \mid u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$$
  とみなす.

  条件 (iii)　$\phi|_O = \boldsymbol{u}$.

$\boxed{1}$ (25 点満点)

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定し, U を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合とし, $p \in U$ を固定する.

問 1. (5 点) $f, g : U \to \mathbb{R}$ (U 上の関数) とし, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. 以下の関数達の定義を述べよ:

(f, g の和) $f + g : U \to \mathbb{R}$,

(f の λ 倍) $\lambda f : U \to \mathbb{R}$,

(f, g の積) $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$.

問 2. (5 点) $\eta, \eta_1, \eta_2 \in T_p(U)$ とし, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. 以下の写像達の定義を述べよ:

(η_1, η_2 の和) $\eta_1 + \eta_2 : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$,

(η の λ 倍) $\lambda \eta : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$.

ただし $C^\infty(U)$ が関数の和, スカラー倍について閉じるという事実の証明は述べなくてよい.

問 3. (5 点) $\eta_1, \eta_2 \in T_p(U)$ とする. 上で定義した写像

$$\eta_1 + \eta_2 : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$$

が p におけるライプニッツ則を満たすことを示せ. ただし $C^\infty(U)$ が関数の積について閉じるという事実の証明は述べなくてよい.

問 4. (5 点) U 上の C^∞-級関数 $1_U : U \to \mathbb{R}$ を

$$1_U : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$$

と定義する. 任意の $\eta \in T_p(U)$ について, $\eta(1_U) = 0$ となることを示せ.

問 5. (5 点) 写像 $\theta : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ を

$$\theta : C^\infty(U) \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(p)$$

と定める. このとき θ は $T_p(U)$ の元でないことを示せ (上記の問題の結果を用いてよい).

$\boxed{2}$ (25 点満点)

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定し, U を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合とする. 以下, $C^\infty(U)$ が関数の和, スカラー倍, 積について, 結合的かつ可換な $\mathbb{R}$-代数となることは, 証明抜きで用いてよい.

問 1. (10 点) $h \in C^\infty(U)$, $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ とする. 写像 $hX : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ を

$$hX : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto h \cdot (Xf)$$

と定める. ここで $h \cdot (Xf)$ は C^∞-級関数 h, Xf の積を表すものとする. このとき $hX \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ となることを示せ. ただし上記 $hX : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ が写像として well-defined であることについては証明を省略してよい. また

$$L_h : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ g \mapsto h \cdot g$$

が線型写像であるという事実は証明抜きで用いてよい.

問 2. (5 点) $n = 2$, $U = \mathbb{R}^2$ とする.

$$X = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$$

を表す図を描け (結果のみでよい).

問 3. (10 点) $n = 2$, $U = \mathbb{R}^2$ とする. また

$$X = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2},\ Y = \frac{\partial}{\partial x_2} \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$$

としたとき,

$$[X, Y] = g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + g_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

となるような C^∞-級関数 $g_1, g_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ を求めよ.

$\boxed{3}$ (25 点満点)

問 1. (5 点) C^∞-級写像 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2) \mapsto (\cos x_1, \sin x_2, x_1 + x_2)$$

と定める．また C^∞-級関数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (y_1, y_2, y_3) \mapsto y_1 + y_2 + y_3$$

とおく．また $p = (0, 0)$ および

$$\eta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p \in T_p(\mathbb{R}^2)$$

とおく．このとき,

$$\varphi^*(f) := f \circ \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

および

$$((d\varphi)_p(\eta))\,(f) \in \mathbb{R}$$

をそれぞれ求めよ．

問 2. (5 点) $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定し, U_1, U_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$ の空でない開集合とする．写像

$$\varphi : U_1 \to U_2,\ x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n_2}(x))$$

がこの試験問題の表紙に書いてある意味で C^∞-級写像であるとする．このとき, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_2}$ はそれぞれ U_1 上の関数として C^∞-級であることを示せ (ただし, U_2 上の多項式関数が C^∞-級であるという事実は証明抜きで用いてよい)．

問 3. (5 点) $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定し, U_1, U_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$ の空でない開集合とする．写像

$$\varphi : U_1 \to U_2,\ x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n_2}(x))$$

を考え, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_2}$ がすべて U_1 上 C^∞-級関数であるとする．また $f \in C^\infty(U_2)$ を固定する．このとき各 $j = 1, \ldots, n_1$ について,

$$\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_j} : U_1 \to \mathbb{R}$$

を f の偏微分, φ_i $(i = 1, \ldots, n_2)$ の偏微分などを用いて表せ (連鎖律: 証明は不要)．

問 4. (10 点) $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定し, U_1, U_2, U_3 をそれぞれ $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$, $\mathbb{R}^{n_3}$ の空でない開集合とする．また, C^∞-級写像 $\varphi : U_1 \to U_2$, $\psi : U_2 \to U_3$ および $p \in U_1$ を固定する．このとき

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p$$

となることを示せ．

$\boxed{4}$ (25 点満点)

問 1.

$$S := \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\} \ (\subset \mathbb{R}^3)$$

とおく. また

- $O = \{x \in S \mid x_3 > 0\} \subset S$,
- $U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid -u_1^2 + u_2^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$,
- $\boldsymbol{u} : O \to U,\ x \mapsto (x_1, x_2)$,

とおく.

(1) (5 点) 定義に従って $(O, U, \boldsymbol{u})$ が S 上の 2 次元局所座標系となることを示したい. 何を示せばよいか述べよ.

(2) (5 点) $\boldsymbol{u} : O \to U,\ x \mapsto (x_1, x_2)$ が写像として well-defined であることを示せ.

(3) (5 点) $\boldsymbol{u} : O \to U$ が連続であることを示せ.

問 2. (10 点) $\mathbb{R}^4$ の部分集合 S を

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid xw - yz = 1\} \ (\subset \mathbb{R}^4)$$

とおく. また $p = (1, 0, 0, 1) \in S$ とおく. このとき S 上の p のまわりの 3 次元局所座標系であって, $\mathbb{R}^4$ 内で正則なものが存在することを示せ. ただし, 以下の定理 A を用いてよいこととする:

定理 A: 以下を任意に固定する:

- $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,
- C^∞-級写像 $\varphi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$,
- $q \in \varphi(\mathbb{R}^{n+k})$,
- $p \in S_q := \varphi^{-1}(q) \subset \mathbb{R}^{n+k}$.

このとき, $(d\varphi)_p : T_p(\mathbb{R}^{n+k}) \to T_q(\mathbb{R}^k)$ が全射 ($\iff$ ヤコビ行列 $(J\varphi)_p$ がランク k) であるならば, S_q 上の p のまわりの n 次元局所座標系であって, $\mathbb{R}^{n+k}$ 内で正則なものが存在する.

$\boxed{5}$ (40 点満点)

問 1. (10 点) $p \in \mathbb{R}^2$ とする.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p \in T_p(\mathbb{R}^2)$$

が $T_p(\mathbb{R}^2)$ において一次独立であることを示せ. ただし $T_p(\mathbb{R}^2)$ がベクトル空間になるという事実の証明は述べなくてよい.

問 2. (10 点) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定し, U を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合とする. 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ について,

$$[X, Y] : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$$

が場のライプニッツ則を満たすことを示せ.

問 3. (10 点) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を, C^∞-級写像であって, $\varphi((0,0)) = (2,1)$ となるものとする. また

- $c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ t \mapsto (t, 2t^3)$
- $c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ t \mapsto (t^2, t)$

とおく. $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 $\varphi \circ c_1$, $\varphi \circ c_2$ がそれぞれ

- $\varphi \circ c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ t \mapsto (t + 2t^3 + 2, 2t^4 + 1)$,
- $\varphi \circ c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ t \mapsto (t^2 + t + 2, t^3 + 1)$.

となるとする. このとき φ の $(0,0)$ におけるヤコビ行列 $(J\varphi)_{(0,0)}$ を求め, さらに線型写像

$$(d\varphi)_{(0,0)} : T_{(0,0)}(\mathbb{R}^2) \to T_{(2,1)}(\mathbb{R}^2)$$

の階数を求めよ (答えのみでよい).

問 4. (10 点) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を C^∞-級関数とし,

$$S = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathbb{R}^n\} \ \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とおく. このとき S 上の n 次元局所座標系 $(O, U, \boldsymbol{u})$ を

- $O = S$,
- $U = \mathbb{R}^n$,
- $\boldsymbol{u} : O \to U, \ (x, f(x)) \mapsto x$

として定める. このとき $(O, U, \boldsymbol{u})$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ 内で正則であることを示せ (ただし $(O, U, \boldsymbol{u})$ が S 上の n 次元局所座標系であることについては証明を省略してよい).