

学生証番号 : \_\_\_\_\_ 氏名 : \_\_\_\_\_

2019 年度前期 幾何学 A 演習 小テスト 第 9 回 7/19

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  を固定し,  $M$  を位相空間とする. また  $M$  上の  $n$  次元局所座標系全体のなす集合を  $\mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$  と表すこととする.

問 1.  $M$  上の  $n$  次元  $C^\infty$ -atlas の定義を述べよ.

問 2.  $\mathcal{A}_0$  を  $M$  上の  $n$  次元  $C^\infty$ -atlas とする.  $[\mathcal{A}_0]$  の定義を述べよ.

問 3.  $C^\infty(M; \mathcal{A}_0) = C^\infty(M; [\mathcal{A}_0])$  を示せ. ただし, 以下の Lemma A, B, Proposition C を用いてよい:

Lemma A:  $(O, U, \mathbf{x}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$  とする. このとき, 空でない  $O$  の開部分集合  $O_0$  について,

$$C^\infty(M; (O, U, \mathbf{x})) \subset C^\infty(M; (O_0, \mathbf{x}(O_0), \mathbf{x}|_{O_0})).$$

Lemma B:  $(O, U, \mathbf{x}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$  とする. このとき,  $O$  の開被覆  $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  with  $O_\lambda \neq \emptyset$  (for any  $\lambda \in \Lambda$ ) について,

$$C^\infty(M; (O, U, \mathbf{x})) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^\infty(M; (O_\lambda, \mathbf{x}(O_\lambda), \mathbf{x}|_{O_\lambda})).$$

Proposition C:  $(O, U, \mathbf{x}), (O', V, \mathbf{y}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$  with  $O \cap O' \neq \emptyset$  とする. 座標変換  $\tau_{\mathbf{x}\mathbf{y}}, \tau_{\mathbf{y}\mathbf{x}}$  が共に  $C^\infty$ -diffeo であるとき,

$$C^\infty(M; (O \cap O', \mathbf{x}(O \cap O'), \mathbf{x}|_{O \cap O'})) = C^\infty(M; (O \cap O', \mathbf{y}(O \cap O'), \mathbf{y}|_{O \cap O'})).$$