

2019 年後期 線型代数演習 II 第 10 回 (11/18 配布)

キーワード: 線型変換の固有値, 固有空間, 固有空間分解.

問 107 から問 109 まで:

集合 V を

$$V := \{f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \text{ は実多項式関数で, その次数は } 2 \text{ 以下} \}$$

とし, V 上の標準的な和とスカラー倍を定め, 実線型空間とみなす. また V 上の線型変換 $\varphi : V \rightarrow V$ を

$$\varphi : V \rightarrow V, f(x) \mapsto (x^2 + x + 1) \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + (x - 3) \frac{df}{dx}(x) + 2f(x)$$

と定める (φ が線型変換であることについての証明は省略してよい).

問 107. $f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2$ として, V の基底 $(f_0(x), f_1(x), f_2(x))$ を定める (この $(f_0(x), f_1(x), f_2(x))$ が V の基底になることの証明は省略してよい). このとき, 基底 $(f_0(x), f_1(x), f_2(x))$ について線型変換 $\varphi : V \rightarrow V$ を行列表示せよ.

問 108. 線型変換 $\varphi : V \rightarrow V$ の固有値をすべて求めよ. また各固有値に対して, 対応する固有空間をそれぞれ求めよ.

問 109. m を自然数とする. $\varphi^m(f_2(x))$ を求めよ. (ただし φ^m は φ を m 回合成したものとする).

問 110 から問 115 まで:

集合 V を

$$V := \{ \text{実数列 } (a_n)_n \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ and } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ for any } n = 1, 2, 3, \dots \}$$

とし, V 上の標準的な和とスカラー倍を定め, 実線型空間とみなす. また V 上の線型変換 $\sigma : V \rightarrow V$ を

$$\sigma : V \rightarrow V, (a_n)_n \mapsto (a_{n+1})_n$$

と定める (σ が線型変換であることについての証明は省略してよい).

問 110. (設問ミスです. ごめんなさい) : 初項 3 で公差が -2 の数列を σ で変換した数列はどんな数列か?

問 111. $a_1 = 1, a_2 = 0$ とし, 各 $n \geq 3$ について $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$ として帰納的に a_n を定めて得られる実数列を $(a_n)_n$ とする. また, $b_1 = 0, b_2 = 1$ とし, 各 $n \geq 3$ について $b_n := b_{n-1} + b_{n-2}$ として帰納的に b_n を定めて得られる実数列を $(b_n)_n$ とする. このとき $(a_n)_n, (b_n)_n \in V$ であり, さらに $((a_n)_n, (b_n)_n)$ が V の基底となることを示せ.

問 112. 上記の基底 $((a_n)_n, (b_n)_n)$ について, 線型変換 $\sigma : V \rightarrow V$ を行列表示せよ.

問 113. 線型変換 $\varphi : V \rightarrow V$ の固有値をすべて求めよ. また各固有値に対して, 固有空間をそれぞれ求めよ.

問 114. 上記で定めた実数列 $(a_n)_n$ の一般項 a_n を求めよ.

問 115. $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ を固定する. V の元 $(c_n)_n$ を $c_1 = \alpha, c_2 = \beta$ であるようなものとする (このような $(c_n)_n$ は (α, β) に応じて一意に定まる). このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ が $\mathbb{R}$ 上収束するための (α, β) についての必要十分条件を求めよ.

裏へ続く

問 116. (発表なし) 実 n 次正方行列 A が特殊直交行列であるとは, $\det A = 1$ かつ $({}^t A)A = E_n$ (つまり転置行列が逆行列) となることとする.

(1) $\theta \in \mathbb{R}$ とする.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

が特殊直交行列であることを示せ.

(2) A, B が n 次の特殊直交行列であるとき, 積 AB も特殊直交行列であることを示せ.

(3) $n = 3$ とする. 3 次の特殊直交行列は必ず 1 を固有値として持つことを示せ.

(4) “ $\mathbb{R}^3$ における, 原点を通るある直線を軸とする回転変換” は $\mathbb{R}^3$ 上の線型変換であり, 対応する行列は特殊直交行列であることを示せ. 逆に 3 次の特殊直交行列に対応する線型変換は “ $\mathbb{R}^3$ における, 原点を通るある直線を軸とする回転変換” であることを示せ.

(5) ℓ_1, ℓ_2 を $\mathbb{R}^3$ における原点を通る直線とする. ℓ_1 を軸とする回転変換 φ , ℓ_2 を軸とする回転変換 ψ を任意に固定する. このとき原点を通るある直線 ℓ_3 が存在して, 変換の合成 $\psi \circ \varphi$ は ℓ_3 を軸とする回転変換であることを示せ.

問 117. (発表なし: 倉橋くん提供問題 (問題文は奥田が適宜改変してます)) n, i を自然数とする. また, $a_{j,k} \in \mathbb{K}$ ($j = 1, \dots, i, k = 1, \dots, n$) とし, $b_j \in \mathbb{K}$ ($j = 1, \dots, i$) とする. このとき, $\mathbb{K}^n$ の部分集合 V を以下で定める:

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{k=1}^n a_{j,k} v_k = b_j \text{ for any } j = 1, 2, \dots, i \right\} \subset \mathbb{K}^n.$$

(1) V が $\mathbb{K}^n$ の部分線形空間であるための必要十分条件は

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, i\}, b_j = 0$$

であることを示せ.

(2) 上記の条件が満たされてる場合を考える. このとき,

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix}$$

とおくと, 等式

$$\dim V = n - \text{rank } A$$

が成り立つことを示せ.

問 118. (発表なし: 倉橋くん提供問題 (問題文は奥田が適宜改変してます)) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ を「実数列全体の集合」とし, 標準的な和とスカラー倍によって実ベクトル空間とみなす. 以下の条件 (a), (b), (c) を満たす $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の部分集合 V を構成せよ. また, V はどのような空間か, 簡潔に説明せよ.

条件 (a): V は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の線型部分空間.

条件 (b): $(n)_n, (n+1)_n \in V$.

条件 (c): V は上記の条件 (a), (b) を満たすものの中で最小である. すなわち上記の条件 (a), (b) を満たす任意の $W (\subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ について, $V \subset W$ が成り立つ.