

2019 年後期 線型代数演習 II 第 4 回 (10/16 配布)

キーワード: ベクトル空間

今回は  $\mathbb{N}$  は 1 以上の整数全体の集合を表す記号として用いる ( $0 \in \mathbb{N}$  とする流儀もあるので注意).

問 29 から問 41 まで: 以下の集合  $V$  に実ベクトル空間の構造を定めよ. すなわち  $V$  上に和とスカラー倍を定義し (well-defined か否か注意すること), それがベクトル空間の公理を満たすことを示せ (発表の際には重要ポイントのみ述べればよい).

問 29.  $V = \mathbb{R}^n$  ( $n$  は 1 以上の整数).

問 30.  $V = \{o\}$  (一点集合).

問 31.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x + y + z = 0 \right\}.$$

問 32.  $X$  を任意の集合とする.  $V = \mathbb{R}^X := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は写像}\}$ .

問 33.  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(a_n)_{n=1,2,3,\dots} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ for any } n\}$  (実数列全体のなす集合).

問 34.  $V = \{(a_n)_{n=1,2,3,\dots} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ for any } n\}$ .

問 35. (発表なし)  $V = \{(a_n)_{n=1,2,3,\dots} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (a_n)_n \text{ は等差数列}\}$ .

問 36. (発表なし:難)

$$V = \ell^2(\mathbb{N}) := \{(a_n)_{n=1,2,3,\dots} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}.$$

問 37. (発表なし)  $V = M(n, m; \mathbb{R})$  ( $n \times m$  実行列全体のなす集合).

問 38. (発表なし)  $V = C^0([0, 1])$  (閉区間  $[0, 1]$  上の実数値連続関数全体のなす集合).

問 39. (発表なし)

$$V = \{f \in C^0([0, 1]) \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\}.$$

問 40. (発表なし)  $V = C^\infty(\mathbb{R})$  ( $\mathbb{R}$  上で定義された  $C^\infty$ -級関数全体のなす集合).

問 41. (発表なし:幾何学 A(多様体論:3 年生向け) の試験問題から引用)

$$V = \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}) := \{X : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \mid X(f+g) = X(f) + X(g), X(\lambda f) = \lambda X(f), \\ X(fg) = (Xf)g + f(Xg) \text{ for any } f, g \in C^\infty(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

ただし  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$  について,  $fg : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto f(p)g(p)$  とし,  $f+g, \lambda f \in C^\infty(\mathbb{R})$  は一つ上の問題で定めた  $C^\infty(\mathbb{R})$  における和とスカラー倍とする.

裏へ続く

問 42 から問 46 まで: 以下で記述する  $(V, +, \cdot)$  はベクトル空間を定めない。それぞれ理由を説明せよ。

問 42.

$$\begin{cases} V := \mathbb{R}^2, \\ (a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 b_1, a_2 b_2) \quad \text{for each } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \\ k \cdot (a_1, a_2) := (k a_1, k a_2) \quad \text{for each } k, a_1, a_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

問 43.

$$\begin{cases} V := \mathbb{R}^2, \\ (a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \quad \text{for each } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \\ k \cdot (a_1, a_2) := (k^2 a_1, k^2 a_2) \quad \text{for each } k, a_1, a_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

問 44.

$$\begin{cases} V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \\ (a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \quad \text{for each } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \\ k \cdot (a_1, a_2) := (k a_1, k a_2) \quad \text{for each } k, a_1, a_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

問 45.

$$\begin{cases} V := \mathbb{Z}^2, \\ (a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \quad \text{for each } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}, \\ k \cdot (a_1, a_2) := (k a_1, k a_2) \quad \text{for each } k \in \mathbb{R}, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

問 46.

$$\begin{cases} V := \{(a_n)_{n=1,2,3} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_{n+1} = a_n + 1 \text{ for any } n\}, \\ (a_n)_n + (b_n)_n := (a_n + b_n)_n \quad \text{for each } (a_n)_n, (b_n)_n \in V, \\ k \cdot (a_n)_n := (k a_n)_n \quad \text{for each } k \in \mathbb{R}, (a_n)_n \in V. \end{cases}$$