

2019 年後期 線型代数演習 II 第 5 回 (10/21 配布)

キーワード: 線型写像, 部分空間の定義と性質

問 47. 線型写像の定義を述べ, 簡単な具体例を挙げて説明せよ (線型写像の例と線型でない写像の例を両方挙げよ).

問 48. 「線型写像同士の合成は線型写像である」という主張を定式化し, 証明せよ. また簡単な具体例も挙げよ.

問 49. ベクトル空間の線型部分空間の定義を述べ, 簡単な具体例を挙げて説明せよ (実ベクトル空間の例を挙げたうえ, 線型部分空間の例と線型部分空間にならない部分集合の例を両方挙げよ).

問 50. 線型写像の核と像の定義を述べよ. また簡単な具体例を挙げて説明せよ.

問 51. 「線型部分空間はそれ自身ベクトル空間である」という主張を定式化し, 証明せよ. また簡単な具体例も挙げよ.

問 52. 「線型写像の核と像はそれぞれ線型部分空間である」という主張を定式化し, 証明せよ. また簡単な具体例も挙げよ.

問 53. (発表なし) V をベクトル空間とし, W をその線型部分空間とする. V 上の同値関係 “ $\sim$ ” を, 各 $v_1, v_2 \in V$ について,

$$v_1 \sim v_2 \text{ if } v_1 - v_2 \in W$$

として定義する. この同値関係による V の商集合を V/W と書き, 商写像を $\pi: V \rightarrow V/W$ と表すこととする. このとき V/W には自然にベクトル空間の構造が定まり, また $\pi: V \rightarrow V/W$ は線型写像となることを示せ.

以下, n, m, k は 1 以上の整数を表すものとする.

問 54 から 問 56 まで: $m \times n$ 実行列全体のなす集合を $M(m, n; \mathbb{R})$ とおく. $m \times n$ 実行列 $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ について, 写像 $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を

$$f_A \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{m,j} x_j \end{pmatrix}$$

と定める.

問 54. $A \in M(m, n; \mathbb{R})$ とする. このとき写像 $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は線型写像であることを示せ.

問 55.

$$\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) := \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ は線型写像} \}$$

とおく. このとき, 対応

$$\Phi: M(m, n; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), A \mapsto f_A$$

は全単射であることを示せ.

問 56. A を $m \times n$ 実行列, B を $k \times m$ 実行列とする. 写像 $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f_B: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ の合成

$$f_B \circ f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

を考える. このとき $f_B \circ f_A = f_{BA}$ となることを示せ. ただし $BA \in M(k, n; \mathbb{R})$ は行列 B, A の積を表すものとする.