2019 年後期 線型代数演習 II 第 6 回 (10/24 配布)

キーワード: 線型写像, 線型部分空間の具体例

$\boxed{\text{問 57 から 問 58 まで:}}$ $\mathbb{R}^n$ を n 次元縦ベクトルのなす集合とし, 標準的な和とスカラー倍を定義し, 実ベクトル空間とみなす.

問 57. 以下の部分集合 W は $\mathbb{R}^3$ の線型部分空間であるか否か, それぞれ調べよ:

$$(1)\ W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x+3y+z=0 \right\}, \quad (2)\ W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x+3y+z=1 \right\},$$

$$(3)\ W := \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ -t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad (4)\ W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z^2 = x^2+y^2 \right\},$$

問 58. A を $m \times n$ 実行列とする.

(1) $W := \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0\}$ が $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間であることを示せ.

(2) $U := \{Av \in \mathbb{R}^m \mid v \in \mathbb{R}^n\}$ が $\mathbb{R}^m$ の線型部分空間であることを示せ.

$\boxed{\text{問 59 から 問 62 まで:}}$ $V = \{(a_n)_n \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ for any } n \in \mathbb{N}\}$ を実数列全体のなす集合とし, 以下のように和とスカラー倍を定義し, 実ベクトル空間とみなす:

和: $(a_n)_n + (b_n)_n := (a_n + b_n)_n$ for each $(a_n)_n, (b_n)_n \in V$,

スカラー倍: $\lambda(a_n)_n := (\lambda a_n)_n$ for each $\lambda \in \mathbb{R}, (a_n)_n \in V$.

問 59. 以下の部分集合 W は V の線型部分空間でないことを確認せよ.

(1) $W := \{(a_n)_n \in V \mid a_{n+1} = a_n + 2 \text{ for any } n\}$.

(2) $W := \{(a_n)_n \in V \mid a_n \in \mathbb{Z} \text{ for any } n\}$.

問 60. 以下の部分集合 W は V の線型部分空間であることを示せ.

(1) $W := \{(a_n)_n \in V \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ for any } n\}$.

(2) $W := \{(a_n)_n \in V \mid (a_n)_n$ はコーシー列 $\}$.

問 61. V の線型部分空間 $W := \{(a_n)_n \in V \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ for any } n\}$ を V 上の和, スカラー倍の誘導する構造によりベクトル空間とみなす. 写像 $\phi : W \to \mathbb{R}^2,\ (a_n)_n \mapsto (a_1, a_2)$ について考える:

(1) 上記の写像 $\phi : W \to \mathbb{R}^2$ は線型写像であることを示せ.

(2) 上記の写像 $\phi : W \to \mathbb{R}^2$ は全単射であることを示せ.

問 62. (発表なし) V の線型部分空間 $W := \{(a_n)_n \in V \mid (a_n)_n$ はコーシー列 $\}$ を V 上の和, スカラー倍の誘導する構造によりベクトル空間とみなす. 写像

$$\psi : W \to \mathbb{R}, (a_n)_n \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$$

について考える:

(1) 上記の写像 $\psi : W \to \mathbb{R}$ は well-defined であるということを簡単に説明せよ (解析 I で習った知識を用いてよい).

(2) ε-N 論法を用いて, 上記の写像 $\psi : W \to \mathbb{R}$ が線型写像であることを示せ.

裏に続く

$\boxed{\text{問 63 から 問 68 まで:}}$ 集合

$$V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は写像 }\}$$

に以下のように和とスカラー倍を定義し, 実ベクトル空間とみなす:

和: $f + h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + h(x)$ for each $f, h \in V$,
スカラー倍: $\lambda f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lambda f(x)$ for each $\lambda \in \mathbb{R}, f \in V$.

また各 $r \in \{0, 1, 2, ...\}$ について,

$$C^r(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は } C^r\text{-級 }\} \subset V$$

とおき, さらに

$$C^\infty(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は } C^\infty\text{-級 }\} \subset V$$

とおく.

問 63. 各 $r \in \{0, 1, 2, ...\}$ について, $C^r(\mathbb{R})$ は V の線型部分空間であることを示せ. また $C^\infty(\mathbb{R})$ も V の線型部分空間であることを示せ. ただし解析 I で習った各種知識については用いてよいこととする.

以下, $C^r(\mathbb{R})$, $C^\infty(\mathbb{R})$ を, V 上の和とスカラー倍が誘導する構造によりそれぞれベクトル空間とみなす.

問 64. 写像

$$\frac{d}{dx} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ f \mapsto \frac{df}{dx}$$

が well-defined であり, 線型写像であることを示せ.

問 65. 写像

$$\frac{d^2}{dx^2} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ f \mapsto \frac{d^2 f}{dx^2}$$

が well-defined であり, 線型写像であることを示せ.

問 66. 写像 ϕ を

$$\phi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ f \mapsto (\frac{df}{dx})^2$$

と定める. ただし各 $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ について, $h^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (h(x))^2$$

と定めるものとする. このとき $\phi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ は well-defined であることを示せ (解析 I で習った各種知識については用いてよい). また, 線型写像でないことも示せ.

問 67. 写像

$$\varphi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ f \mapsto \frac{d^2 f}{dx^2} + f$$

が well-defined であり, 線型写像であることを示せ.

問 68.

$$W := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \frac{d^2 f}{dx^2} = -f\}$$

が $C^\infty(\mathbb{R})$ の線型部分空間であることを示せ.