

キーワード: 一次独立性, 基底

問 69. 「一次独立性」の定義を説明せよ. また簡単な例 (一次独立である場合, そうでない場合) を挙げよ.

問 70. 「基底」の定義を説明せよ. また簡単な例 (基底である場合, そうでない場合) を挙げよ.

問 71. (重要) 集合

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$$

に標準的な和とスカラー倍を定義し, 実ベクトル空間とみなす. 以下, ベクトル空間 V のゼロベクトルが

$$\mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$$

であるということの証明は省略してよい.

(1) 上記 V は $\mathbb{R}^3$ のどのような部分集合か? 図を描け.

(2)

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$$

とおく. V の元の組 (w_1, w_2) が V の基底であることを示せ.

(3)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V$$

とおくと, V の元の組 (v_1, v_2) は V の基底である (証明は省略してよい). このとき基底 (w_1, w_2) から基底 (v_1, v_2) への変換行列を求めよ.

問 72. (重要) $\mathbb{R}^2$ 上の線型変換 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3x + y \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

と定める.

(1)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

とおく. $\{v_1, v_2\}$ が $\mathbb{R}^2$ 上の基底であることを示せ. また $f(v_1), f(v_2)$ を計算せよ.

(2) $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とおく. w を v_1, v_2 の一次結合で表せ. また $n = 1, 2, 3, \dots$ について $f^n(w) \in \mathbb{R}^2$ を求めよ. ただしここでは

$$f^n(w) = \overbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}^{n \text{ 個}}(w)$$

の意味であるとする.

(3) $v \in \mathbb{R}^2$ であって, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(v) = \mathbf{0}$ となるようなものをすべて求めよ.

問 73. $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. V を実ベクトル空間とし, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_k) \in V^k$ を V の k 個の元の組とする. 標準的な実ベクトル空間 $\mathbb{R}^k$ から V への写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ を

$$\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^k \rightarrow V, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^k a_i v_i$$

と定める. 以下をそれぞれ示せ.

- (1) 写像 $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^k \rightarrow V$ は線型写像である.
- (2) 写像 $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^k \rightarrow V$ が単射であることと, $\mathcal{B}$ が一次独立であることは同値.
- (3) 写像 $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^k \rightarrow V$ が全射であることと, $\mathcal{B}$ が V を張ることは同値.
- (4) 写像 $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^k \rightarrow V$ が全単射であることと, $\mathcal{B}$ が V の基底であることは同値.

問 74. 集合

$$W = \{(a_n)_n \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ and } a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \text{ for any } n = 1, 2, 3, \dots\}$$

に標準的に和とスカラー倍を定義し, 実ベクトル空間とみなす (中間試験大問 6 で出題したもの). また等比数列 $(c_n)_n, (d_n)_n$ をそれぞれ

$$c_n = 1, d_n = 2^{n-1} \text{ for each } n = 1, 2, 3, \dots$$

として定める.

(1)

$$\sigma : W \rightarrow W, (a_n)_n \mapsto (a_{n+1})_n$$

が W 上の線型変換を定めることを示せ (写像として well-defined であることも示すこと).

- (2) $(c_n)_n, (d_n)_n$ がそれぞれ W の元であり, 組 $((c_n)_n, (d_n)_n)$ が W の基底となることも示せ. また $\sigma((c_n)_n), \sigma((d_n)_n)$ がどのような数列になるか計算せよ.
- (3) W の元 $(a_n)_n$ について, $(x, y) = (a_1, a_2)$ とおく. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が $\mathbb{R}$ 上収束するような (x, y) をすべて求めよ.

問 75. (発表なし) 問 68 で定めた

$$W = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \frac{d^2 f}{dx^2} = -f \right\}$$

を実ベクトル空間とみなす.

(1) $h_1, h_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ をそれぞれ以下で定める:

$$h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x, \quad h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos x$$

このとき $h_1, h_2 \in W$ となることを示せ. また組 (h_1, h_2) が一次独立であることを示せ.

(2) 組 (h_1, h_2) が W の基底であることを示せ. ただし常微分方程式に関する以下の定理は認めてよい:

定理: $f_1, f_2 \in W$ が $f_1(0) = f_2(0)$ かつ $\frac{df_1}{dx}(0) = \frac{df_2}{dx}(0)$ を満たすとき, $f_1 = f_2$.

詳しく知りたい人は「高階常微分方程式の初期値問題の解の一意性・存在性」などについて調べてみてください.

参考文献:

- 伊藤秀一「常微分方程式と解析力学」(共立講座 21 世紀の数学)
- 柳田英二, 栄信一郎「常微分方程式論」(朝倉書店 講座 数学の考え方 7)