2019 年後期 線型代数演習 II 第 8 回 (11/11 配布)

キーワード: 線型写像, 線型変換の行列表示 (表現行列), ベクトル空間の次元

問 76 から 問 77 まで: 集合 V を

$$V := \{ f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \text{ は実多項式関数で, その次数は 3 以下 } \}$$

とし, 標準的な和とスカラー倍を定め, 実ベクトル空間とみなす. また,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix} \;\middle|\; y + z + w = 0 \right\}$$

も標準的な和とスカラー倍により実ベクトルとみなす.

問 76. (重要) V から W への線型写像 $\varphi : V \to W$ を

$$\varphi : V \to W,\ f(x) \mapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ \frac{df}{dx}(0) \\ -f(0) - \frac{df}{dx}(0) \end{pmatrix}$$

と定める (この写像が線型であることの証明は省略してよい). このとき線型写像 $\varphi : V \to W$ を, 以下のそれぞれの V の基底, W の基底について行列表示せよ:

(1) V の基底 : $(1, x, x^2, x^3)$, W の基底: (w_1, w_2), ただし, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(2) V の基底 : $(x-1, x+1, x^3-x^2, x^3+x^2)$, W の基底: (w'_1, w'_2), ただし, $w'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

問 77. (重要) V 上の線型変換 $\tau : V \to V$ を

$$\tau : V \to V,\ f(x) \mapsto (x+1)\frac{df}{dx}(x) + f(x)$$

と定める (この写像が線型であることの証明は省略してよい). このとき V 上の線型変換 τ を以下のそれぞれの V の基底について行列表示せよ:

(1) V の基底: $(1, x, x^2, x^3)$.

(2) V の基底: $(x-1, x+1, x^3-x^2, x^3+x^2)$.

問 78.「ベクトル空間が有限次元である」とはどういうことか説明せよ. また有限次元ベクトル空間, 無限次元ベクトル空間の例をそれぞれ挙げよ.

問 79. 有限次元ベクトル空間について, 「次元の定義が well-defined である」ことは自明でない. この well-defined 性を示すためにどのようなことを議論する必要があるか説明せよ.

裏へ続く

問 80. (重要) V, W をそれぞれ有限次元ベクトル空間とし, $\varphi : V \to W$ を線型写像とする. また $(v_1, \ldots, v_n)$, $(w_1, \ldots, w_m)$ をそれぞれ V, W の基底とし, 線型写像 φ の $(v_1, \ldots, v_n)$, $(w_1, \ldots, w_m)$ についての表現行列を A とする.

(1) $(v'_1, \ldots, v'_n)$ を V の基底とし, $(v_1, \ldots, v_n)$ から $(v'_1, \ldots, v'_n)$ への基底変換行列を P とする. このとき線型写像 φ の $(v'_1, \ldots, v'_n)$, $(w_1, \ldots, w_m)$ についての表現行列 B を, A と P を用いて表せ.

(2) $(w'_1, \ldots, w'_m)$ を W の基底とし, $(w_1, \ldots, w_m)$ から $(w'_1, \ldots, w'_m)$ への基底変換行列を Q とする. このとき線型写像 φ の $(v_1, \ldots, v_n)$, $(w'_1, \ldots, w'_m)$ についての表現行列 C を, A と Q を用いて表せ.

問 81. 有限次元ベクトル空間の線型部分空間はベクトル空間として有限次元であることを示せ.

問 82.「二つの有限次元ベクトル空間が線型同型のとき, それらの次元は等しい」を定式化し, 証明せよ.

問 83.「二つの有限次元ベクトル空間の次元が等しいとき, それらは線型同型である」を定式化し, 証明せよ.

問 84. (重要) V, W をそれぞれ有限次元ベクトル空間とし, $\varphi : V \to W$ を線型写像とする. また $(v_1, \ldots, v_n)$, $(w_1, \ldots, w_m)$ をそれぞれ V, W の基底とし, 線型写像 φ の $(v_1, \ldots, v_n)$, $(w_1, \ldots, w_m)$ についての表現行列を A とする.

(1) $r := \operatorname{rank} A$ (行列 A の階数) とおく. このとき V の基底 $(v'_1, \ldots, v'_n)$, W の基底 $(w'_1, \ldots, w'_m)$ であって,

$$\varphi(v'_i) = \begin{cases} w'_i & (\text{if } i \le r) \\ \mathbf{0} & (\text{if } i > r) \end{cases}$$

となるものが存在することを示せ. (Hint : A の基本変形と基底の変換の関係を考えよ)

(2) A の階数 r は Image φ (φ の像) の次元と一致することを示せ.

(3) 次元定理 「$\dim \mathrm{Image}\,\varphi = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\,\varphi$」 を示せ.

問 85 から問 89 まで: 以下の実ベクトル空間 V の次元を決定せよ (ただし和とスカラー倍は標準的なものを考えることとする):

問 85. $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + 2y + z = 0 \right\}$.

問 86. $V := \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = \mathbf{0} \}$ (ただし, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$)

問 87. $V := \{ Av \in \mathbb{R}^4 \mid v \in \mathbb{R}^3 \}$ (ただし, A は問 86 と同じもの)

問 88. $V := \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid Bv = 3v \}$ (ただし $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$)

問 89. $V := \{$ 実数列 $(a_n)_n \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ for any $n = 1, 2, 3, \ldots \}$.