2019 年後期 線型代数演習 II 第 9 回 (11/14 配布)

キーワード: 行列の固有多項式, 固有値, 固有空間, 対角化.

問 90 から問 96 まで: 体 $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ のいずれかとし, A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列とする. 固有値, 固有空間, 対角化などについては, すべて体 $\mathbb{K}$ 上で考えることとする.

問 90. (重要) $\mathbb{K}$ の元の組 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ と $\mathbb{K}^n$ の基底 $(v_1, \dots, v_n)$ であって, 各 $i = 1, \dots, n$ について $Av_i = \lambda_i v$ が成り立つようなものがあるとする (つまり v_i は A の固有値 λ_i についての固有ベクトル). このとき, P を "第 i 列が v_i $(i = 1, \dots, n)$" となるような n 次正方行列とし, D を

$$D_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & (\text{ if } i = j) \\ 0 & (\text{ otherwise }) \end{cases}$$

となる n 次正方行列とする. このとき P は正則で, $P^{-1}AP = D$ が成り立つことを示せ.

問 91. (重要) $\lambda \in \mathbb{K}$ についての以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i) λ は A の固有値である.

条件 (ii) λ は A の固有多項式の根である.

問 92. $\lambda \in \mathbb{K}$ を A の固有値とする. このとき固有値 λ に対応する A の固有空間 V_λ $(\subset \mathbb{K}^n)$ は $\mathbb{K}^n$ の線型部分空間であることを示せ.

問 93. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ を相異なる A の固有値の列であるとする. 各固有値 λ_i に対応する固有空間を V_i と書くことにする. このとき以下が成り立つことを示せ:

$$\text{任意の } (v_1, v_2, \dots, v_k) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k \text{ with } v_1 + v_2 + \dots v_k = \mathbf{0} \text{ について,}$$
$$v_1 = v_2 = \dots = v_k = \mathbf{0}.$$

問 94. P を $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正則正方行列とする.

(1) A の固有多項式と $P^{-1}AP$ の固有多項式は等しいことを示せ.

(2) λ を A および $P^{-1}AP$ の固有値とし, V_λ, W_λ をそれぞれ A の固有値 λ についての固有空間, $P^{-1}AP$ の固有値 λ についての固有空間とする. このとき V_λ と W_λ の関係を P を用いて表せ.

問 95. (やや難:事実としては知っておいてほしい) $\lambda \in \mathbb{K}$ を A の固有値とする. A の λ についての固有空間を V_λ, A の固有多項式を $p_A(x)$ とおき, $p_A(x)$ における根 λ の重複度を m_λ^A とおく. このとき, 不等式 $\dim_{\mathbb{K}} V_\lambda \leq m_\lambda^A$ が成り立つことを示せ (Hint: $\mathbb{K}^n$ の基底をうまく取り換えて, n に関する帰納法を用いる).

問 96. A の固有多項式を $p_A(x)$ とおく. 各固有値 $\lambda \in \mathbb{K}$ について, A の λ についての固有空間を V_λ とおき, $p_A(x)$ における根 λ の重複度を m_λ^A とおく. このとき A についての以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i): A は対角化可能である.

条件 (ii): 固有多項式 $p_A(x)$ は $\mathbb{K}$ 内に重複度こみで n 個の根を持ち, 各固有値 $\lambda \in \mathbb{K}$ について, 等式 $\dim_{\mathbb{K}} V_\lambda = m_\lambda^A$ が成り立つ.

裏へ続く

問 97 から 問 101 まで (重要): 以下の実行列 A の実係数固有多項式, 実固有値, 実固有空間をそれぞれ求めよ. また $\mathbb{R}$ 上で対角化可能な場合は対角化し, A^m (m は自然数) がどのような行列になるか考察せよ. 対角化可能でない場合はその理由を簡潔に述べよ.

問 97. $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

問 98. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

問 99. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

問 100. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

問 101. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

問 102 から 問 105 まで: 以下の複素行列 A の複素係数固有多項式, 複素固有値, 複素固有空間をそれぞれ求めよ. また $\mathbb{C}$ 上で対角化可能な場合は対角化し, A^m (m は自然数) がどのような行列になるか考察せよ. 対角化可能でない場合はその理由を簡潔に述べよ.

問 102. $A = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 1 \\ 1 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}$.

問 103. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$ (ただし ω は $\omega^3 = 1$ かつ $\omega \neq 1$ となる複素数).

問 104. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

問 105. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

問 106. (発表なし) A を実 n 次正方行列であって, ${}^tA = A$ (実対称行列) であるとする.

(1) A を複素行列とみなした場合でも, その固有値はすべて実数であることを示せ (つまり A の固有多項式の複素数としての根は, すべて実数であることを示せ).

(2) A の相異なる固有値 λ_1, λ_2 について, 対応する固有空間をそれぞれ $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき V_1, V_2 は "直交" することを示せ (直交の定義も調べよ).

(3) ある直交行列 P が存在して, A は P により実対角化可能 (つまり $P^{-1}AP$ が対角行列となる) であることを示せ. ただし n 次正方行列が直交行列であるとは $({}^tP)P$ が単位行列となることである (つまり P は正則で, $P^{-1} = {}^tP$).