幾何学D・多様幾何基礎B

（担当：奥田隆幸）

参考文献

- 森田茂之「微分形式の幾何学」（岩波）
- John. M. Lee「Introduction to smooth manifolds」（Springer, GTM）

成績について

全7回のレポートで評価

(詳しくはまたアナウンスします)

§0：講義概要の説明

内容：多様体上のリーマン積分論

① 多様体上の微分形式

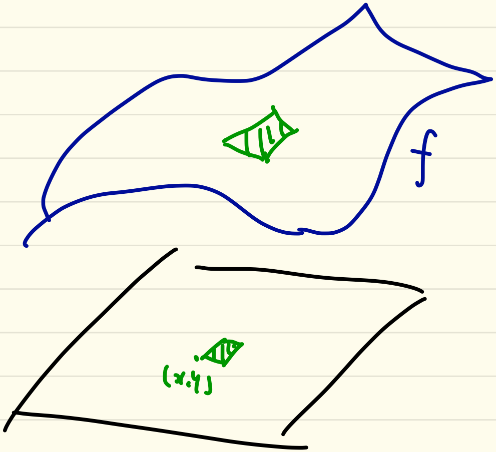
② 多様体上のリーマン積分

③ de Rham 理論

① 多様体上の微分形式

$D := [0,1] \times [0,1] \ (\subset \mathbb{R}^2)$ とおく

$f(x,y)$: D 上の連続関数 とする.



"f の D 上のリーマン積分"

$$\int_D f(x,y)\,\underline{dx\,dy}$$

各点 (x,y) での微小四角形の面積

"$dx\,dy$" の気持ち：

"微小四角形の面積"を測る"ものさし"

問：この "$dx\,dy$" は厳密には何なのか？

答：微分形式（と思ってよい）

⇝ 多様体上で一般的に定式化を行う

（12月中）

② 多様体上のリーマン積分論

- M : m-次元 C^∞-級多様体
- D : k-次元積分領域 (a compact oriented k-dim'l submanifold with boundary in M)
- ω : k-次微分形式 (気持ち: k-次元微小四角形の体積を測るものさし)
- f : M 上の C^∞-級関数

$\rightsquigarrow$ f の ω による D 上のリーマン積分

" $\int_D f\omega$ " が定義できる! (1月上旬)

Stokesの定理

∂D : Dの境界

η : $k-1$ 次微分形式

$d\eta$: ηの"外微分" とする.

(k次微分形式になる)

このとき $$\int_D d\eta = \int_{\partial D} \eta$$

"微積分の基本定理"の一般化

③ de Rham 理論

Ω : compact oriented k-dim'l submanifold without boundary in M ($\partial\Omega = \emptyset$)

を(今日だけ) k-サイクルと呼ぶ

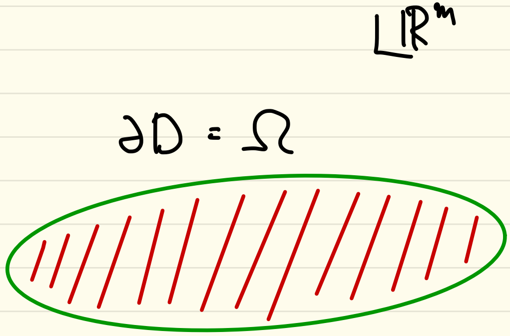
問 : k-サイクル Ω であって,
"$\Omega = \partial D$ となる $k+1$ 次元の D が存在しない" ものはどれだけある?

($\rightsquigarrow$ M の穴の情報 : ホモロジー理論)

例：$M = \mathbb{R}^m$ のとき

${}^\forall \Omega$: k-サイクル,

${}^\exists D$ s.t. $\partial D = \Omega$



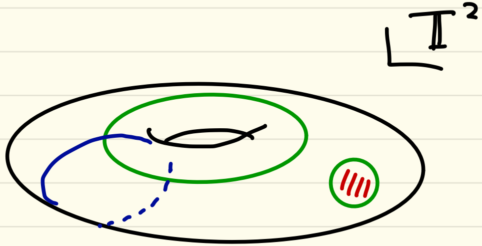
$\rightsquigarrow$ $\mathbb{R}^m$ に穴はない！

例：$M = \mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1$ のとき

1-サイクル Ω で

"$\Omega = \partial D$" とならないものが

"2種類" ある.



$\rightsquigarrow$ $\mathbb{T}^2$ に "1次元穴" がある！

Ω : k-サイクル in M を fix

どうやって "$\Omega = \partial D$ となる D の非存在" を示す?

(十分条件が欲しい)

ω : k-次微分形式 with $d\omega = 0$

Theorem : $\displaystyle\int_{\Omega} \omega \neq 0 \Rightarrow \Omega = \partial D$ となる D は存在しない

(Proof) : 対偶を示す. $\Omega = \partial D$ とする.

Stokes の定理から $$\int_{\Omega} \omega = \int_{\partial D} \omega = \int_{D} d\omega = \int_{D} 0 = 0$$ ∎

従って

$\{\omega : k$次微分形式 $\mid d\omega = 0\}$ は

"M の k-次元穴" の探知機として使える.

実は次が成り立つ

<u>Theorem</u> $d\omega = 0$ を満たす k次微分形式 ω について

以下の2条件は同値

(i) $\exists \Omega$: k-サイクル s.t. $\int_\Omega \omega \neq 0$ ← 探知機として働く

(ii) $\neg(\exists \eta$: $k-1$次微分形式 s.t. $d\eta = \omega)$

$$\left\{ \omega : k\text{次微分形式} \,\middle|\, d\omega = 0 \right\} \Big/ \left\{ \omega \,\middle|\, \begin{array}{l} d\omega = 0 \\ \exists \eta \text{ s.t. } d\eta = \omega \end{array} \right\}$$

k次元穴の探知機

やくに立たないものを捨てた

$$\parallel$$

$$H^k_{DR}(M : \mathbb{R})$$

"役に立つ探知機の集まり"

k次の de Rham コホモロジー

de Rham の定理

$$\dim H^k_{DR}(M:\mathbb{R}) = \dim H_k(M:\mathbb{R})$$

(k次ホモロジー群/$\mathbb{R}$)

特に $H^k_{DR}(M:\mathbb{R})$ はホモトピー不変

(1月後半)