§1：多様体論の復習

内容：
- C^∞級多様体（C^∞-mfd）
  manifold
- C^∞級関数
- 接空間

§1.1 : C^∞-mfd

M : 位相空間 $(\neq \emptyset)$

Def 1.1.1 : $\underset{\emptyset}{\overset{}{O}} \neq$, $O \underset{\text{open}}{\subset} M$, $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とし, ($O \neq \emptyset$, $U \neq \emptyset$)

相対位相により位相空間とみなす.

また $u : O \to U$ を同相写像とする.

このとき 組 (O, U, u) を M の n 次元局所座標系,

u を O 上の局所座標とよぶ

Def 1.1.2

この講義では

$$\mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n) := \{(O, U, u) \mid M\text{の}n\text{次元局所座標系}\}$$

とおく（独自記号なので注意）

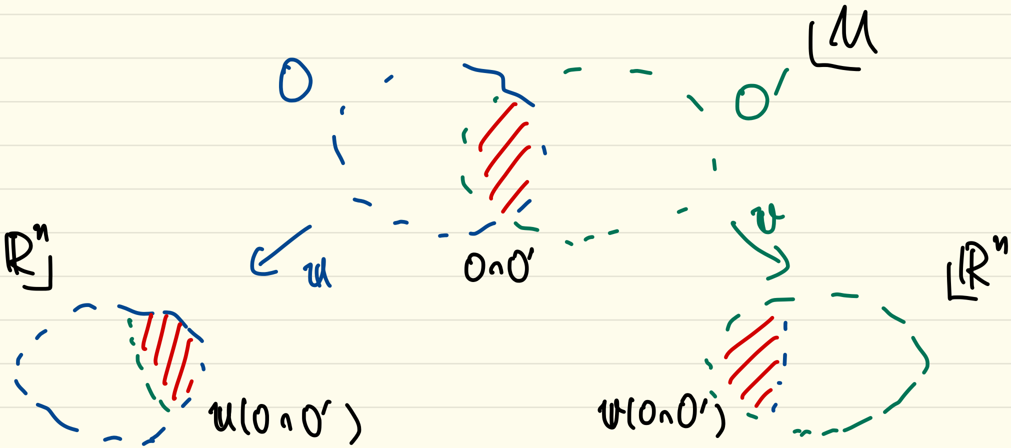
$(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$

with $O \cap O' \neq \emptyset$ を fix.

$u(O \cap O') \underset{\text{open}}{\subset} U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

$v(O \cap O') \underset{\text{open}}{\subset} V \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

に注意.



Def. 1.1.4 :

$$\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$$
$$u \mapsto v(u^{-1}(u))$$

$$\left(\text{i.e. } \tau_{uv} = v|_{O \cap O'} \circ (u|_{O \cap O'})^{-1} \right)$$

を (O, U, u) から (O', V, v) への座標変換という.

Def 1.1.5

$(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{L}C(M : \mathbb{R}^n)$

が C^∞ に貼り合う

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

① $O \cap O' = \emptyset$

or

② $O \cap O' \neq \emptyset$ かつ

$\mathbb{R}^n$ の open sets

$\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$

$\tau_{vu} : v(O \cap O') \to u(O \cap O')$

が共に C^∞ 級写像

Def 1.1.6

$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ が

M の atlas (地図帳)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (1) $\bigcup_{(O,U,u)\in\mathcal{A}_0} O = M$ ← すべての地点をカバー

(2) $^\forall (O,U,u),\ (O',V,v) \in \mathcal{A}_0$,

(O,U,u) と (O',V,v) は

C^∞ に貼り合う.

地図間の整合性

M上の atlas は極大なものを考えておくと
いろいろ都合がよい

Def 1.1.7 M上の atlas $\mathcal{A}$ が極大

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B} \subseteq LC(M;\mathbb{R}^n)$ となる
atlas $\mathcal{B}$ on M が存在しない

Remark: $LC(M;\mathbb{R}^n)$ は普通は atlas にはならない
("極大 ideal" のときと定義が少し違う)
(環論)

Theorem 1.1.8 : $\mathcal{A}_0$ を atlas on M とする.

(1) $\mathcal{A}_0$ を含む極大 atlas $[\mathcal{A}_0]$ on M

ただ1つ存在する.

地図帳 $\mathcal{A}_0$ の完全版

(2) $[\mathcal{A}_0] = \{ (O, U, u) \in LC(M; \mathbb{R}^n) \mid$

$\forall (O', V, v) \in \mathcal{A}_0,$

(O, U, u) と (O', V, v) は

C^∞ に貼り合う $\}$

Def 1.1.9 : $(M, \mathcal{A})$: n 次元 C^∞ 級多様体

(C^∞ manifold, smooth manifold)

" n-mfd " と略す

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} M \text{ は Hausdorff かつ第二可算公理を満たす位相空間} \\ \mathcal{A} \subset LC(M ; \mathbb{R}^n) \text{ は極大 atlas on } M \end{cases}$

Remark : 第二可算公理は"積分"の定義に必要.

そのときまた説明する.

§1.2 C^∞級関数と接空間

設定 : $(M, \mathcal{A})$: n次元 C^∞-mfd

Def 1.2.1 :

関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が $(M, \mathcal{A})$ 上 C^∞級

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A},\ f \circ u^{-1} \in C^\infty(U)$

Def 1.2.2:

$C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathcal{A}) := \{ f : M \to \mathbb{R} \mid (M, \mathcal{A})$ 上 C^∞ 級 $\}$

$\mathcal{A}$ は略す

Prop 1.2.3:

$C^\infty(M)$ は関数の和とスカラー倍について可換 $\mathbb{R}$-代数をなす.

(結合則, 単位則)

以下, $p \in M$ を固定する.

Def 1.2.4 :

$C^\infty(M)$ 上の線型汎関数

線型写像 $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ が

点 $p \in M$ の接ベクトル

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g)$$

$$\left({}^\forall f, g \in C^\infty(M) \right)$$

p におけるライプニッツ則

Def. 1.2.5 :

$T_pM := \{ v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid v$ は p における接ベクトル $\}$

Prop. 1.2.6

T_pM は汎関数の和とスカラー倍についてベクトル空間 $/\mathbb{R}$

T_pM の基底について：

設定：$(O, U, u) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ を fix

Def 1.2.7：各 $i = 1, 2, \cdots, n$ について

$e_1, \cdots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{(f \circ u^{-1})(u(p) + te_i) - f(p)}{t}}$$

← $f \circ u^{-1} \in C^\infty(U)$ の $u(p)$ での第 i 成分での偏微分

Theorem 1.2.8

$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \,\middle|\, i=1,\cdots,n \right\}$ は T_pM の基底.

特に $\dim T_pM = \underset{\sim}{n}$

M の次元

Def. 1.2.9 :

$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \,\middle|\, i=1,\cdots,n \right\}$ を

T_pM の (O, U, x) に関する座標基底と呼ぶ

基底のとり換えについて

設定：$(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}$ with $p \in O \cap O'$ を fix

記号

$$\left(J\tau_{uv} \right)_{u(p)} := \left(\frac{\partial \tau_{uv}}{\partial u_i}(u(p)) \right)_{i,j=1,\cdots,n}$$

$u(O \cap O')$ から $v(O \cap O')$ への C^∞-map

τ_{uv} の $u(p)$ におけるヤコビ行列

Theorem 1.2.10 :

各 $j = 1, \cdots, n$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(J\,\tau_{uv} \right)_{u(p)} \right)_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_p$$