Section 2 : Cut-off 関数とその応用

内容 : 隆起関数

Cut-off 関数

C^∞ 級関数の延長

Section 2.1：隆起関数とCut-off関数

設定：　$M = (M, \mathcal{A})$ ： n-mfd

記号：　$C(M) := \{ f : M \to \mathbb{R} \mid \text{連続} \}$

$C^\infty(M) := \{ f : M \to \mathbb{R} \mid C^\infty\text{級} \}$

$\left(C^\infty(M) \subset C(M) \right)$

Def 2.1.1 : 各関数 $f : M \to \mathbb{R}$ について

Mにおける閉包

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{ x \in M \mid f(x) \neq 0 \}} \subset M$$

support of f

Def 2.1.2 : $C_c(M) := \{ f \in C(M) \mid \mathrm{supp} f$ がコンパクト $\}$

$C_c^\infty(M) := C_c(M) \cap C^\infty(M)$

$C_c(M)$ の元を M 上の隆起関数という.

Prop 2.1.3 : $C_c(M)$ は $C(M)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数 (和, スカラー倍, 積で閉じる)

$C_c^\infty(M)$ は $C^\infty(M)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数

(ただし単位的とは限らない)

定数関数の support は M ✗

問：ゼロでない C^∞ 級隆起関数は存在するか？

$M = \mathbb{R}$ の場合でも自明ではない

Remark：ゼロでない整関数（$\mathbb{C}$ 全域で定義されている正則関数）

の support は $\mathbb{C}$ と一致

（Liouville の定理）

答：存在する！しかも cut-off 関数が存在する！

（C^∞ は意外とやわらかい）

Def 2.1.4 : $p \in M$, Ω : p の開近傍$\overset{\text{in } M}{}$とする.

$b \in C_c(M)$ が (p, Ω) の cut-off 関数

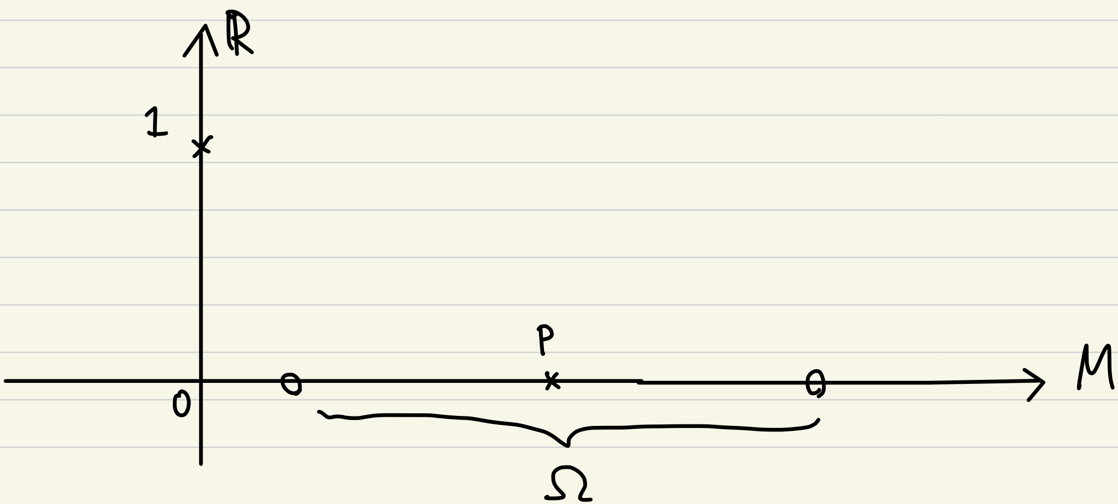
$$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def}} \begin{cases} 0 \leq b(x) \leq 1 \quad ({}^\forall x \in M), \\ \operatorname{supp} b \subset \Omega \quad \text{and} \\ {}^\exists V : p \text{ の開近傍 s.t. } b|_V \equiv 1. \end{cases}$$

$(\rightsquigarrow V \subset \operatorname{supp} b \subset \Omega)$

Def 2.1.4 : $p \in M$, Ω : p の開近傍とする.

$b \in C_c(M)$ が (p, Ω) の cut-off 関数

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} 0 \leq b(x) \leq 1 \quad ({}^\forall x \in M), \\ \operatorname{supp} b \subset \Omega \quad \text{and} \\ {}^\exists V : p \text{ の開近傍 s.t. } b|_V \equiv 1. \end{cases}$



Def 2.1.4 : $p \in M$, Ω : pの開近傍とする.

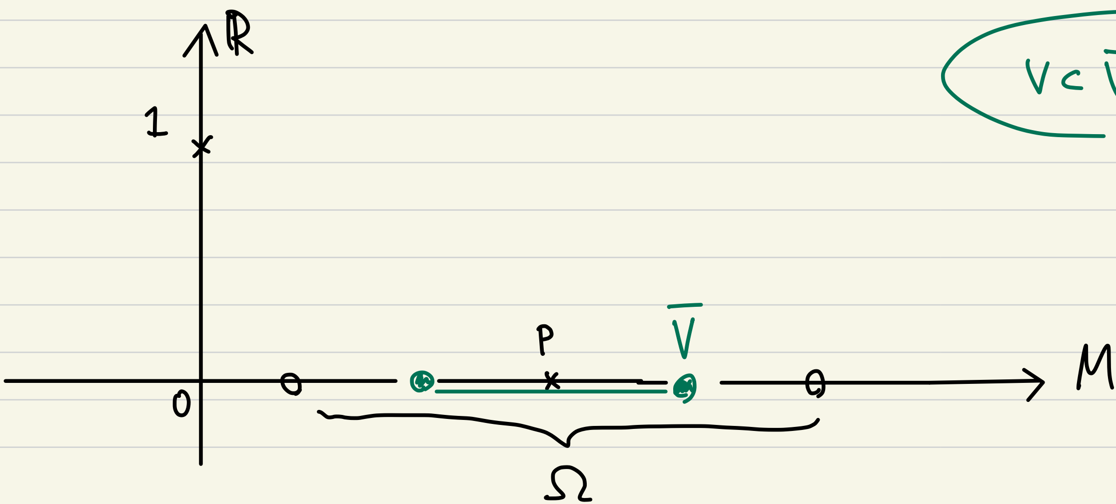
$b \in C_c(M)$ が (p, Ω) の cut-off 関数

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$$\begin{cases} 0 \leq b(x) \leq 1 \quad ({}^\forall x \in M), \\ \mathrm{supp}\, b \subset \Omega \quad \text{and} \\ {}^\exists V : p \text{ の開近傍 s.t. } b|_V \equiv 1. \end{cases}$$

開集合 in M

$V \not\subset \mathrm{supp}\, b \subset \Omega$

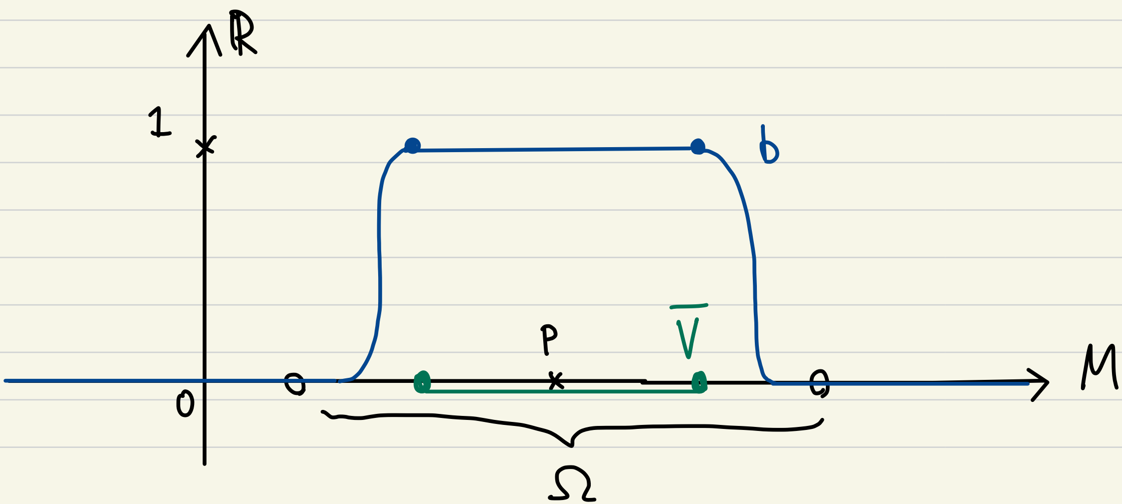
$V \subset \bar{V} \subset \mathrm{supp}\, b \subset \Omega$



Def 2.1.4 : $p \in M$, Ω : p の開近傍とする.

$b \in C_c(M)$ が (p, Ω) の cut-off 関数

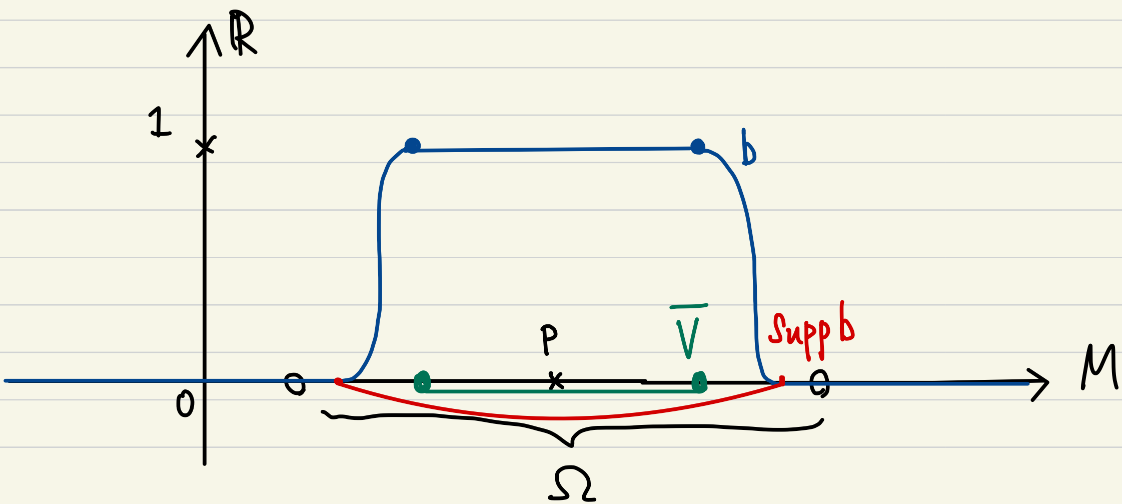
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} 0 \leq b(x) \leq 1 \quad ({}^\forall x \in M), \\ \operatorname{supp} b \subset \Omega \quad \text{and} \\ {}^\exists V : p \text{ の開近傍 s.t. } b|_V \equiv 1. \end{cases}$



Def 2.1.4 : $p \in M$, Ω : p の開近傍とする.

$b \in C_c(M)$ が (p, Ω) の cut-off 関数

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} 0 \leq b(x) \leq 1 \quad ({}^\forall x \in M), \\ \operatorname{supp} b \subset \Omega \quad \text{and} \\ {}^\exists V : p \text{ の開近傍 s.t. } b|_V \equiv 1. \end{cases}$



Theorem 2.1.5

$\forall p \in M$, $\forall \Omega$: p の開近傍 in M,

$\exists b \in C_c^\infty(M)$ s.t. b は (p, Ω) の cut-off 関数

Proof of Thm 2.1.5

Step 1 : $M = \mathbb{R}^n$, $p = 0$ の場合

Step 2 : 一般の場合

Step 1 : $M = \mathbb{R}^n$, $p = 0$ の場合

Lemma 2.1.6 : $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$

は $\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級

各 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して, $U_r(0;\mathbb{R}^n) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r \}$ とおく.

Prop 2.1.7 : $\forall r \in \mathbb{R}_{>0}$, $\exists b \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ s.t.

b は $(0, U_r(0;\mathbb{R}^n))$ の cut-off 関数

$$b(x) := \frac{\rho(r - \|x\|)}{\rho(\|x\| - \frac{1}{2}r) + \rho(r - \|x\|)}, \quad V := U_{\frac{1}{2}r}(0;\mathbb{R}^n)$$ とすれば OK

Step 2 : 一般の場合 : $p \in M$, Ω : p の開近傍 in M を fix.

$(O, U, u) \in \mathcal{A}$ であって以下を満たすものをとる

(${\mathcal{A}}$ の極大性からそのようなものがとれる)

$$\begin{cases} p \in O \subset \Omega \\ u(p) = 0 \\ U_1(0; \mathbb{R}^n) \subset U \end{cases}$$

Prop 2.1.7 より $(0, U_1(0; \mathbb{R}^n))$ の cut-off 関数 $b_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ がとれる.

$b : M \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} b_0(u(x)) & (x \in O) \\ 0 & (x \notin O) \end{cases}$ とおく.

証. $b \in C_c^\infty(M)$ かつ b は (p, Ω) の cut-off 関数

定義より $0 \le b(x) \le 1$ $({}^\forall x \in M)$ は明らか.

以下を示せば十分

証. ① $\mathrm{supp}\, b$ はコンパクト かつ $\mathrm{supp}\, b \subset O \subset \Omega$

② $b \in C^\infty(M)$

③ ${}^\exists V \underset{\text{open}}{\subset} M$ ($p \in V$) s.t. $b|_V \equiv 1$

① (示) $\mathrm{supp}\, b$ はコンパクトかつ $\mathrm{supp}\, b \subset O \subset \Omega$

まず b の定義より

$\{x \in M \mid b(x) \neq 0\}$ ← これの閉包が $\mathrm{supp}\, b$

$= u^{-1}(\{u \in U \mid b_0(u) \neq 0\})$

$(\because \mathrm{supp}\, b_0 \subset U)$ → $= u^{-1}(\underbrace{\{u \in \mathbb{R}^n \mid b_0(u) \neq 0\}}_{}) \subset O$

に注意する。 これの閉包が $\mathrm{supp}\, b_0$

いま $\mathrm{supp}\, b_0$ はコンパクト $(\because b_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n))$ かつ $\mathrm{supp}\, b_0 \subset U$ であるから

$u^{-1}(\mathrm{supp}\, b_0) \subset O$ もコンパクト.

$u^{-1} : U \to O$ は同相

M がハウスドルフであることに注意すると

$$u^{-1}(\mathrm{supp}\, b_0) \subset O \subset \Omega \text{ はコンパクト閉集合 in } M$$

であり、更に $\{x \in M \mid b(x) \neq 0\} \subset u^{-1}(\mathrm{supp}\, b_0)$ より ← 1つ上の注意から

$$\underbrace{\mathrm{supp}}_{\text{閉包}}\, b \subset u^{-1}(\mathrm{supp}\, b_0) \subset O \subset \Omega \text{ もコンパクト}$$

（① 証明終）

② 示 $b \in C^\infty(M)$

いま $\mathrm{supp}\, b \subset O$ より $\{O, M \setminus \mathrm{supp}\, b\}$ は M の open cover.
($\because$ ①)

従って以下を示せばよい

示 $b|_O \in C^\infty(O)$ かつ $b|_{M\setminus \mathrm{supp}\, b} \in C^\infty(M \setminus \mathrm{supp}\, b)$

b の定義より

U 上 C^∞

$$b|_O = b_0 \circ u = u^*(b_0) \in C^\infty(O)$$

$u : O \to U$ による引き戻し

また $b|_{M\setminus \mathrm{supp}\, b} = 0 \in C^\infty(M \setminus \mathrm{supp}\, b)$

$\mathrm{supp}\, b$ の定義

(② 証明終)

③ (示) $p \in {}^{\exists} V \underset{\text{open}}{\subset} M$ s.t. $b|_V \equiv 1$

b_0 は $(0, \mathcal{U}_1(0;\mathbb{R}^n))$ の cut-off 関数であって

$0 \in V_0 \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ であって $b_0|_{V_0} \equiv 1$ となるものがとれる.

$V_0 \subset \operatorname{supp} b_0 \subset \mathcal{U}_1(0;\mathbb{R}^n) \subset U$ より $V_0 \underset{\text{open}}{\subset} U$.

$V := u^{-1}(V_0) \underset{\text{open}}{\subset} O \underset{\text{open}}{\subset} M$ とおくと

$p \in V \underset{\text{open}}{\subset} M$ かつ $b|_V \equiv 1$ (③証明終)

∎

Section 2.2: C^∞ 級関数の延長

設定: $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd

$\emptyset \neq \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$

記号:

$$\mathcal{A}_\Omega := \{ (O \cap \Omega, u(O \cap \Omega), u|_{O \cap \Omega}) \in \mathcal{LC}(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid (O, U, u) \in \mathcal{A} \}$$

$\rightsquigarrow (\Omega, \mathcal{A}_\Omega)$ は n-mfd

開部分多様体

問：$C^\infty(\Omega)$ の元は $C^\infty(M)$ の元とみなせるか？

Def 2.2.1：$\mathrm{rest}^M_U : C^\infty(M) \to C^\infty(\Omega),\ f \mapsto f|_\Omega$

Prop 2.2.2：$\mathrm{rest}^M_U : C^\infty(M) \to C^\infty(\Omega)$

は $\mathbb{R}$代数準同型として well-defined.

Remark：$\mathrm{rest}^M_U : C^\infty(M) \to C^\infty(\Omega)$

は全射とも単射とも限らない.

まずい（例 $M = S^1,\ \Omega = S^1 \setminus \{*\}$）

答："局所的には" できる！

Theorem 2.2.3 : $\forall p \in \Omega$, $p \in {}^{\exists} V \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$ s.t.

$$\mathrm{rest}^M_V\, C^\infty(M) \supset \mathrm{rest}^\Omega_V\, C^\infty(\Omega) \quad \text{in } C^\infty(V)$$

$$\left(\text{i.e. } \forall h \in C^\infty(\Omega),\ {}^{\exists}\tilde{h} \in C^\infty(M) \text{ s.t. } \tilde{h}|_V = h|_V \right)$$

点 p のまわりでの様子を変えずに

Ω 上の C^∞ 級関数を M 上の C^∞ 級関数に延長できる!

Proof of Thm 2.2.3 : (cut-off 関数の応用) $^\forall p \in \Omega$ をとる.

Thm 2.1.5 より (p, Ω) の cut-off 関数 $b \in C_c^\infty(M)$ がとれる.

cut-off 関数の定義 (Def 2.1.4) より

$\mathrm{supp}\, b \subset \Omega$ であり,

$p \in V \underset{\text{open}}{\subset} M$ であって $b|_V \equiv 1$ となるものがとれる.

㊡ $\forall h \in C^\infty(\Omega),\ ^\exists \hat{h} \in C^\infty(M)$ s.t. $h|_V = \hat{h}|_V$

${}^{\forall} h \in C^\infty(\Omega)$ をとる.

$\tilde{h} : M \to \mathbb{R}$ を

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x) \cdot b(x) & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \notin \Omega) \end{cases}$$

として定める.

$\tilde{h} \in C^\infty(M)$ s.t. $h|_V = \tilde{h}|_V$

$b(x) = 1$ for $x \in V$ より $\tilde{h}|_V = h|_V$ は明らか.

$\tilde{h} \in C^\infty(M)$ を示す.

$\{\Omega, M \setminus \operatorname{supp} b\}$ は M の open cover なので

($\operatorname{supp} b \subset \Omega$ より)

以下を示せば十分

(示) $\tilde{h}|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$ かつ $\tilde{h}|_{M \setminus \operatorname{supp} b} \in C^\infty(M \setminus \operatorname{supp} b)$

まず $h \in C^\infty(\Omega)$, $b|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$ より

$$\tilde{h}|_\Omega = h \cdot b|_\Omega \in C^\infty(\Omega).$$

また定義より明らかに

$$h|_{M \setminus \operatorname{supp} b} = 0 \in C^\infty(M \setminus \operatorname{supp} b)$$

$\blacksquare$